Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20+12*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 10

48. Sei H ein Hilbertraum und sei A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf H. Es bezeichne

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A),\ ||x|| = 1\}$$

den numerischen Wertebereich von A. Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $||(\lambda - A)x|| \geq d||x||$ für alle $x \in D(\lambda - A) = D(A)$, wobei d den Abstand zwischen λ und $\overline{W(A)}$ bezeichnet. (2)

(b) Folgern Sie, dass $\lambda - A$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild besitzt. (3)

(c) Sei nun $A \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie, dass $\lambda - A$ dichtes Bild besitzt und somit wegen Teilaufgabe (b) surjektiv ist. (4*)

Tipp: Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement von $\operatorname{im}(\lambda - A)$ *nur die* 0 *enthält.*

(d) Folgern Sie: Für jedes $A \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$. (2*)

49. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum, sei $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, sei $c > 0$ und $m : \Omega \to [c, \infty)$ messbar.

Wir definieren ein weiteres Maß ν auf (Ω, Σ) durch $\mathrm{d}\nu = m\,\mathrm{d}\mu$ (d.h. m ist die Radon-Nikodym-Dichte von ν bezüglich μ). Außerdem sei $V = L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$.

(a) Zeigen Sie, dass $V \subset H$ ein dichter Untervektorraum ist. (3)

(b) Berechnen Sie die Operatornorm der kanonischen Einbettung $j : V \to H$ (bzgl. der Hilbertraum-Normen auf V und H). (3*)

(c) Berechnen Sie die Operatornorm der kanonischen Einbettung $i : H \to V'$ von H in die Menge aller stetigen anti-linearen Funktionale auf V. (3*)

(d) Sei $f \in H$. Dann ist die Abbildung $\varphi : V \to V$, $v \mapsto \overline{i(f)(v)}$ ein stetiges lineares Funktional auf V. Nach dem Satz Riesz-Fréchet gibt es somit ein $u \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$ für alle $v \in V$. Bestimmen Sie dieses u in Abhängigkeit von f. (3)

(e) Betrachten Sie nun den Spezialfall $H = l^2(\mathbb{N})$. Dann ist $m : \mathbb{N} \to [c, \infty)$ also eine Folge. Zudem sei $\beta = (\beta_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Sei M_β^V der zu β gehörende Multiplikationoperator auf V. (5)

Zeigen Sie, dass $a : V \times V \to \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto \langle M_\beta^V u, v\rangle$ eine stetige Sesquilinearform ist und charakterisieren Sie, wann diese koerziv ist.

(f) Betrachten Sie den Fall, in dem die Sesquilinearform a aus der vorangehenden Teilaufgabe koerziv ist. Bestimmen Sie in diesem Fall den zu a assoziierten Operator A auf H. (4)