Universität Ulm

Abgabe: Wochentag, 10.07.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 10+16*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 11

50. Sei $H = L^2([0,1])$, $H^1 = H^1(0,2)$ und $H^2 = H^2(0,1)$. Zur Erinnerung: Der Sobolev-Räume H^1 und H^2 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H^1 &= \{f \in C([0,1]) : \ f \text{ besitzt eine schwache Ableitung } f' \in H\}, \\ H^2 &= \{f \in H^1 : f' \in H^1\}. \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt auf H^1 ist gegeben durch

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_0^1 u\overline{v} + u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x \quad \forall u, v \in H^1.$$

Man kann zeigen, dass H^1 dicht in H liegt und dass die kanonischen Einbettungen

$$(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H) \quad \text{und} \quad (H^1, ||\cdot||_{H^1} \hookrightarrow (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$$

stetig (sogar kompakt) sind.

Es sei nun $b : \{0,1\} \to [0,\infty)$ beliebig. Wir definieren auf H den **Laplace-Operator mit Robin-Nebenbedingungen** A_b durch

$$D(A_b) = \{u \in H^2 : \ u'(0) = b(0)u(0) \text{ und } u'(1) = -b(1)u(1)\}$$

und $A_b u = -u''$ für alle $u \in D(A_b)$. Unser Ziel ist es, das Evolutionsproblem

$$(*) \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\cdot) = -A_b u(t,\cdot) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

für $u_0 \in D(A_b)$ auf Wohlgestelltheit zu untersuchen.

(a) Es sei (2)

$$a_b : H^1 \times H^1 \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_0^1 u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x + (bu\overline{v})(1) + (bu\overline{v})(0).$$

Zeigen Sie, dass a_b eine stetige Sesqui-Linearform auf H^1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass a_b H-elliptisch ist. (2)

(c) Zeigen Sie, dass der zu a_b assoziierte Operator A gerade der Operator A_b ist. (5)
Tipp: Die Formel der partiellen Integration gilt auch für schwache Ableitungen.
Hinweis: Vergessen Sie nicht zu überprüfen, ob die Definitionsbereiche übereinstimmen.

(d) Zeigen Sie, dass das Evolutionsproblem $(*)$ für jeden Startwert $u_0 \in D(A_b)$ eine eindeutige Lösung besitzt. (1)

(e) Zeigen Sie, dass A_b selbstadjungiert ist. (1*)

(f) Man kann zeigen, dass A_b kompakte Resolvente besitzt. Bestimmen Sie für den Fall $b(0) = b(1) = 0$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A_b und berechnen Sie für die Startfunktion (7*)

$$u_0(x) = 2x^3 - 3x^2$$

die Lösung des Evolutionsproblems $(*)$.

51. Sei $H = l^2$, sei $c > 0$, $(m_n) \subset [c,\infty)$ eine Folge und sei $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ das Maß mit der Eigenschaft $\mathrm{d}\nu = m\,\mathrm{d}\#$ (wobei $\#$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichnet).

Wir setzen $V = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$. Dann wissen wir aus Aufgabe 49 (a), dass V eine dichte Teilmenge von H ist. Außerdem sei $\beta = (\beta_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge, M_β^V der zu β gehörende Multiplikationsoperator auf V und $a(u,v) = \langle M_\beta^V u, v\rangle_V$ für alle $u, v \in V$.

(a) Aus Aufgabe 49 (e) wissen wir, dass a eine stetige Sesqui-Linearform auf V ist; wir haben dort außerdem charakterisiert, wann a koerziv ist. (3*)

Zeigen Sie nun: Es ist a genau dann H-elliptisch, wenn es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\inf_n (\operatorname{Re} \beta_n + \frac{\omega}{m_n}) > 0$$

gilt.

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(m_n) \subset [c, \infty)$ und eine beschränkte Folge $\beta = (\beta_n) \subset (0, \infty)$, so dass die Sesquilinearform a nicht H-elliptisch ist. (2*)

(c) Finden Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(m_n) \subset [c, \infty)$ und eine Folge $\beta = (\beta_n) \subset (0, \infty)$ mit $\inf \beta_n = 0$, so dass die Sesquilinearform a H-elliptisch ist. (3*)