Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 17.07.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 25*

# Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 12

**52.** Seien $V$ und $H$ Hilberträume, sei $V \hookrightarrow H$ eine dichte Einbettung, und sei $a$ ein stetige, $H$-elliptische Sesquilineareform auf $H$. Es sei $A$ der zu $a$ assoziierte Operator.

(a) Sei $D(A)$ mit der Graphnorm $||\cdot||_A$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $||u||_V \leq C||u||_A$ für alle $u \in D(A)$ gilt. Folgern Sie, dass die kanonische Einbettung $D(A) \hookrightarrow V$ stetig ist. (3*)

(b) Zeigen Sie: Falls die Einbettung $V \hookrightarrow H$ kompakt ist, dann ist auch die kanonische Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ kompakt. Folgern Sie, dass $A$ in diesem Fall kompakte Resolvente besitzt. (1*)
*Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 22 (d).*

(c) In Aufgabe 50 (f) war angegeben, dass der Laplace-Operator mit Robin-Randbedingungen $A_b$ kompakte Resolvente besitzt. Verwenden Sie Teilaufgabe (b), um diese Aussage zu beweisen. (1*)
*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die kanonische Einbettung $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ kompakt ist.*

(d) In Aufgabe 30 haben wir auf dem Raum $H = L^2(0, 2\pi)$ den Operator $A$ mit Definitionsbereich (1*)

$$D(A) = \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$$

und $Af = f''$ für alle $f \in D(A)$ betrachtet.
Aus Beispiel 16.7 in der Vorlesung wissen Sie, dass $-A$ zu einer Form auf $H_0^1(0, 2\pi)$ assoziiert ist. Zeigen Sie, dass $A$ kompakte Resolvente besitzt.

Vorbemerkung zur nächsten Aufgabe:
Für ein offenes Intervall $I$ und eine Funktion $f \in L^p(I)$ $(1 \leq < \infty)$ hatten wir definiert: Eine Funktion $g \in L^p(I)$ heißt schwache Ableitung von $f$, falls $\int gv = -\int fv'$ für alle $v \in C_c^\infty(I)$ gilt.
Man kann diese Definition auch leicht verallgemeinern: Unter dem Raum

$$L^1_{loc}(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \text{ messbar } : \int_K |f| < \infty \text{ für alle } K \subset I \text{ messbar mit endlichem Maß}\}$$

verstehen wir die Menge aller messbaren Funktionen auf $I$, die auf jeder messbaren Teilmenge von $I$, die endliches Lebesgue-Maß besitzt, $L^1$-integrierbar sind (man nennt Funktionen aus $L^1_{loc}(I)$ auch **lokal $L^1$-integrierbar**). Man beachte, dass $L^1_{loc}(I) = L^1(I)$ gilt, falls das Intervall $I$ beschränkt ist.
Für eine Funktion $f \in L^p(I)$ und eine Funktion $g \in L^1_{loc}(I)$ definieren wir nun: $g$ heißt **schwache Ableitung** von $f$, falls $\int fv' = -\int gv$ für alle $v \in C_c^\infty(I)$ gilt.

**53.** Sei $H = L^2(\mathbb{R})$, $V = \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \int |u(x)|^2 x^2 \, dx < \infty\}$. Wenn wir $V$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_V = \int u\overline{v} + \int u'\overline{v}' + \int u\overline{v}x^2$$

versehen, wird $V$ zu einem Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass $V$ dicht in $H$ liegt. (1*)

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $V \hookrightarrow H$ kompakt ist. (7**)
*Hinweis: Die kanonische Einbettung $H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist **nicht** kompakt, weil das Intervall $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist!*

(c) Sei nun $a(u, v) = \int u'\overline{v}' + \int u\overline{v}x^2$ für alle $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass $a$ eine symmetrische, stetige und $H$-elliptische Sesquilinearform auf $V$ ist. (3*)

(d) Zeigen Sie, dass der zu $a$ assoziierte Operator $A$ den Definitionsbereich (4*)

$$D(A) = \{f \in V : \ f' \text{ besitzt eine schw. Abl. } f'' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ und } -f'' + fx^2 \in L^2(\mathbb{R})\}$$

besitzt und durch $Af = -f'' + fx^2$ für alle $f \in D(A)$ gegeben ist.
*Bemerkung für Physik-Interessierte: Der Operator $A$ beschreibt einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator.*

(e) Zeigen Sie, dass $A$ kompakte Resolvente besitzt und berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen von $A$. (4*)