Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 09.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 7

1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is surjektiv. (1)

(b) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is bijektiv. (1)

2. Seien A, B, C Mengen und seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv. (1)

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv. (1)

(c) Sind $g \circ f$ und f injektiv, so ist auch g injektiv. (1)

(d) Ist $g \circ f$ injektiv und ist f surjektiv, so ist g injektiv. (1)

3. (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$? (3)

(b) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. (1)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Wir definieren $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Formel $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n + \sum_{k=0}^{n} B_k(a_k - a_{k+1})$.

(b) Wie im Reellen definiert man: Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt *von beschränkter Variation*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ gilt.
Zeigen Sie: Wenn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von beschränkter Variation ist und gegen 0 konvergiert und wenn die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

(c) Sei nun $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge und sei z eine komplexe Zahl mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert.