Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 6

Übungen Analysis 1: Blatt 8

1. Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D und sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Zudem sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ gilt.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt. (3)

3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, dann ist jeder Häufungspunkt der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ auch ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1)

(b) Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, dann ist jeder Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch ein Häufungspunkt der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. (1)

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3|$ ist stetig. (1)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Sie $D = \{0\} \cup [1,2] \subset \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Jede Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in 0.

(b) Finden Sie eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, die nicht stetig in 2 ist.

5. (a) Sei B eine Menge und sei $A \subset B$. Zeigen Sie: Wenn A nicht abzählbar ist, dann ist auch B nicht abzählbar.

(b) Seien A und B Mengen. Zeigen Sie: Wenn A abzählbar ist und wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt, dann ist auch B abzählbar.

6. Seien X, Y zwei Mengen und seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) Es gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

(c) Es gilt $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

7. Seien A und B Mengen. Es gebe eine injektive Abbildung $f : A \to B$ und eine surjektive Abbildung $\tilde{f} : A \to B$. Zeigen Sie, dass es dann eine bijektive Abbildung $h : A \to B$ gibt.

Achtung: Das ist schwierig!