



UNIVERSITÄT ULM
Abgabe: Freitag, 23.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt Dr. Jochen Glück Sommersemester 2017 Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 9

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, das die Eigenschaft $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. (4)
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
 - (a) Sei $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $x_{\max} \in (0, 1]$ derart, dass $f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in (0, 1]$ gilt. (1)
 - (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und injektiv. Dann ist f streng monoton steigend. (1)
3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und surjektiv. Zeigen Sie, dass f stetig ist. (4)
Tipp: Das ε - δ -Kriterium für Stetigkeit ist hier sehr hilfreich.

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Finden Sie eine unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Bild ein Intervall ist.
5. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^n \exp(-x)) = 0$.
6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Wir definieren zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $[a, b]$ durch folgende Rekursionsvorschrift:
 - Sei $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
 - Seien a_n und b_n für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ bereits definiert. Wir setzen $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$. Wenn $f(c_n) \leq 0$ ist, dann sei $a_{n+1} := c_n$ und $b_{n+1} := b_n$. Wenn hingegen $f(c_n) > 0$ ist, dann sei $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := c_n$.

Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergieren, dass ihr Grenzwert übereinstimmt und dass $f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = 0$ gilt.

7. *Zusatzaufgabe zu Aufgabe 6 (wird nicht korrigiert und kann nicht abgegeben werden):*

Schreiben Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl ein Computerprogramm, das für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion f wie in Aufgabe 6 näherungsweise eine Nullstelle von f berechnet.