Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 30.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 10

1. (a) Geben Sie die komplexen Zahlen $e^{i\cdot 0}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3}{2}\pi}$ und $e^{i2\pi}$ jeweils in der Form $x + iy$ mit reellen Zahlen x und y an. (1)

(b) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. (1)

(c) Sei $K_1 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Skizzieren Sie die Menge K_1. (1)

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung (3)

$$f_1 : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(x) = e^{ix} \quad \text{für alle } x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

nur Werte in K_1 annimmt und dass sie bijektiv von $[0, \frac{\pi}{2})$ nach K_1 abbildet.

2. (a) Sei $a > 0$ eine reelle Zahl und sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Beweisen Sie, dass $a^{\frac{1}{k}} = \exp(\frac{1}{k} \ln a)$ gilt. (1)

(b) Sei $a > 0$ eine reelle Zahl und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $a^k = \exp(k \ln a)$ gilt. (1)

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes reelle $a > 0$ definieren wir $a^x := \exp(x \ln a)$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle reellen Zahlen $a, b > 0$: (2)

(i) $a^x > 0$.
(ii) $a^{x+y} = a^x a^y$.
(iii) $(ab)^x = a^x b^x$.
(iv) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(v) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(vi) $\ln(a^x) = x \ln a$.

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

3. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und es gelte $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = x$ gilt, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = x$.

Die folgende Aufgabe schließt an Aufgabe 1 auf der Vorderseite an:

4. (a) Zusätzlich zu der Menge K_1 aus Aufgabe 1 auf der Vorderseite definieren wir nun noch

$$\begin{aligned} K_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z > 0\}, \\ K_3 &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z \leq 0\}, \\ K_4 &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z < 0\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen K_2, K_3 und K_4.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Abbildungen tatsächlich in die jeweils angegebene Menge abbilden und bijektiv sind:

$$\begin{aligned} K_1 \to K_2, &\quad z \mapsto iz, \\ K_2 \to K_3, &\quad z \mapsto iz, \\ K_3 \to K_4, &\quad z \mapsto iz. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass jede der folgenden drei Abbildungen tatsächlich in die angegebene Menge abbildet und bijektiv ist:

$$\begin{aligned} [\frac{\pi}{2}, \pi) \to K_2, &\quad x \mapsto e^{ix}, \\ [\pi, \frac{3}{2}\pi) \to K_3, &\quad x \mapsto e^{ix}, \\ [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \to K_4, &\quad x \mapsto e^{ix}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Teilaufgabe (b) ist sehr hilfreich, um sich hier viel Arbeit zu sparen.

5. Beweisen Sie: Für jedes reelle $x > 0$ ist $\ln x \leq x - 1$.

6. Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.

(a) $(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k})_{n\geq 2}$.

(b) $(\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{\ln k})_{n\geq 2}$.

(c) $(\sum_{k=2}^{n} (-1)^n \frac{1}{\ln n})_{n\geq 2}$.

(d) $(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k})_{n\geq 2}$.

(e) $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\beta > 0$ eine fest gewählte reelle Zahl ist.