Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 14.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 12

1. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$ für alle $x \in [0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in R[0,1]$ gilt. (1)

(b) Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ explizit eine Partion mit Stützstellen π_k von $[0,1]$ an derart, dass $\lim_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$ gilt. (1)

(c) Berechnen Sie für die π_k, die Sie in Teilaufgabe (b) gewählt haben, für jedes $k \in \mathbb{N}$ den Wert $S(\pi_k, f)$. (2)

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (c) das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$. (1)

2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch (3)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f nicht Riemann-integrierbar ist.

Tipp: Verwenden Sie, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen stets eine rationale und eine irrationale Zahl liegt.

3. Finden Sie eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, für die es kein $t_0 \in [-1,1]$ mit der Eigenschaft $2f(t_0) = \int_{-1}^1 f(t)\,dt$ gibt. (2)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Jede differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

(b) Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

(c) Sei $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $f(x) \leq 1$ für alle $x \in [0,5]$. Dann gilt $\int_0^5 f(x)\,dx \leq 1$.

(d) Sei $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $f(x) \geq 1$ für alle $x \in [0,5]$. Dann gilt $\int_0^5 f(t)\,dt \geq 0$.

(e) Seien $f, g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und sei das Produkt fg differenzierbar. Dann ist auch f differenzierbar.

(f) Es gibt eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, für die gilt: $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,0)$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1]$.

(g) Es gibt eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, für die gilt: $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,0)$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Hier noch eine Aufgabe zur Nachbereitung der Vorlesung:

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in R[a,b]$.

(a) Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$. Zeigen Sie, dass f auch auf $[x_1, x_2]$ Riemann-integrierbar ist.

(b) Seien $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{x_1}^{x_3} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} f(t)\,dt$$

gilt.

(c) Seien nun allgemein $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{x_1}^{x_3} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} f(t)\,dt$$

gilt.

Zur Erinnerung: Für $x_0 \in [a,b]$ setzen wir $\int_x^x f(t)\,dt := 0$ und für $x, \hat{x} \in [a,b]$ mit $\hat{x} > x$ setzen wir $\int_{\hat{x}}^x f(t)\,dt := -\int_x^{\hat{x}} f(t)\,dt$.

Und noch eine kleine Spaßaufgabe:

6. Leiten Sie aus Aufgabe 1 auf Blatt 11 den Binomialsatz her.

Tipp: Wenden Sie die Formel auf geschickt gewählte Funktionen f und g an!