Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 100

Zwischenklausur zur Analysis 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: (6×5)

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Nullfolgen in $\mathbb{R}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wenn die Folge $(k^2 a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \big((-1)^n \cdot n\big) = 2$.

(d) Seien A, B zwei nicht-leere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wenn $A \subseteq B$ gilt, dann gilt $\inf A \geq \inf B$.

(e) Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist auch $(\sum_{j=1}^{n} x_j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(f) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge mit $x_3 = 1$, so gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \geq 1$.

2. Ist die Folge $(\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(2k)!})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? (10)

3. Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! \geq n^2$. (10)

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass aus der Aussage (10)

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\exists a \in \mathbb{R} \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0 : \; |a_n - a| < \varepsilon$$

die Aussage

$$(**) \qquad \exists a \in \mathbb{R} \;\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0 : \; |a_n - a| < \varepsilon$$

folgt.

5. Sei $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$. (5+5)

(a) Stellen Sie die komplexe Zahl $\frac{1}{z}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(b) Berechnen Sie den Betrag von z^{147}.

6. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < q$. Beweisen Sie, dass $\frac{p^{2017}-1}{p-1} < \frac{q^{2017}-1}{q-1}$ gilt. (10)

7. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen und sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. (6+4)

(a) Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ebenfalls absolut.

(b) Sei nun $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine beschränkte reelle Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ nicht konvergiert.

8. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es gelte $c_{n+2} = c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens zwei Häufungspunkte besitzt. (10)