Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 28.04.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13

# Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 1

**1.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller über $\mathbb{N}$ indizierten Folgen in $\mathbb{K}$.

(a) Wir betrachten $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{K}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, den Vektorraum der absolut-summierbaren Folgen. Zeigen Sie, dass $(\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ mit $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ für $x \in \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ ein Banachraum ist. (3)

(b) Wir definieren $c_{00}(\mathbb{N}; \mathbb{K}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$, den Vektorraum der abbrechenden Folgen. Zeigen Sie, dass $(c_{00}(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ für $x \in c_{00}(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ ein normierter Raum, aber kein Banachraum ist. (2)

**2.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren durch $x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in U$ für $x_1, x_2 \in V$ eine Äquivalenzrelation auf $V$ und mit $[v] := \{w \in V | w \sim v\}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von $v \in V$. Die Menge der Äquivalenzklassen $V/U := V/\sim$ heißt *Quotientenraum*.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen (2)

(i) $\oplus : V/U \times V/U \to V/U, \quad [x] \oplus [y] := [x + y]$ und

(ii) $\odot : \mathbb{K} \times V/U \to V/U, \quad \alpha[x] := \alpha \odot [x] := [\alpha x]$

wohldefiniert sind.

*Hinweis: Man kann leicht nachrechnen, dass $(V/U, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Dies dürfen Sie von nun an verwenden.*

Sei nun $p$ eine *Halbnorm* auf $V$, d.h. eine Abbildung $p : V \to [0, \infty)$, welche die Eigenschaften $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass $\ker(p) := \{v \in V \mid p(v) = 0\}$ ein Untervektorraum von $V$ ist. (1)

(c) Nun betrachten wir $U = \ker(p)$. Zeigen Sie, dass die durch $\|[x]\| := p(x)$ für $[x] \in V/U$ definierte Abbildung wohldefiniert und eine Norm auf $V/U$ ist. (2)

**3.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $B_r(x)$ für alle $x \in V, r > 0$ offen ist. (1)
*Hinweis: Wenn Sie Lust haben, können Sie auch zeigen, dass das sogar in jedem metrischen Raum gilt.*

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{B_r(x)} = \{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\}$ für alle $x \in V, r > 0$ gilt. (1)
*Hinweis: Für jede Teilmenge $S$ eines metrischen Raumes bezeichnen wir mit $\overline{S}$ den Abschluss von $S$.*

(c) Sei nun $(M, d)$ ein metrischer Raum und sei $x \in M$, $r > 0$. Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass nicht notwendigerweise $\overline{B_r(x)} = \{y \in V \mid d(x, y) \leq r\}$ gilt. (1)