Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 19.05.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 4

Im Folgenden sei wie immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

8. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Sei weiter $(W, \|\cdot\|_W)$ vollständig, $U \subseteq V$ ein *dichter* Untervektorraum, d.h. $\overline{U} = V$. Sei nun $T : U \to W$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass T eine eindeutige beschränkte Fortsetzung auf V besitzt, d.h. es es genau einen beschränkten Operator $\tilde{T} : V \to W$ gibt mit $\tilde{T}u = Tu$ für alle $u \in U$. Zeigen Sie, dass für die Fortsetzung dann außerdem $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ gilt. (5)

9. Wir betrachten die quadratsummierbaren Folgen (4)

$$\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K}) := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Mit der komponentenweisen Addition- und Skalarmultiplikation bilden diese einen Vektorraum (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ definieren wir

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe für $x, y \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ in $\mathbb{K}$ absolut konvergiert und $(\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

10. Sei $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{K}$, $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass x und y genau dann orthogonal sind, wenn $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt. (3)