Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 23.06.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10+5*

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 8

20. Sei $V = c_{00}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ wie in Aufgabe 18(b) auf Blatt 7 mit der dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausgestattet, welches durch

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad \text{für alle } x, y \in V$$

gegeben ist. Dann ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein prä-Hilbertraum, aber kein Hilbertraum.

(a) Sei $W := \{x \in V : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0\}$. Zeigen Sie, dass W ein abgeschlossener Untervektorraum von V ist. (2)

(b) Sei W wie in Teilaufgabe (b) definiert. Zeigen Sie, dass (2)

$$W^{\perp} := \{x \in V : \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in W\} = \{0\}$$

gilt und folgern Sie $W \oplus W^{\perp} \subsetneq V$.

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass der Darstellungssatz von Riesz-Fréchet auf V nicht gilt. (2)

21. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie: Es gibt einen Operator $T^* \in \mathcal{L}(H)$ derart, dass für alle $x, y \in H$ die Gleichung $\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle$ gilt. (4)

Tipp: Definieren Sie für festes $x \in H$ ein Funktional $\psi_x \in H'$, welches durch $\psi_x(y) = \langle x, Ty\rangle$ für alle $y \in H$ gegeben ist. Wenden Sie dann den Satz von Riesz-Fréchet an.

Bonusaufgabe auf der Rückseite.

In der folgenden Bonusaufgabe lernen Sie eine Anwendung des Zornschen Lemmas kennen. Dazu wiederholen wir zunächst einige Begriffe.

Definition. Eine *partiell geordnete Menge* ist ein Paar $(X, \leq)$, wobei X eine Menge ist und $\leq$ eine Relation auf X, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(P1) $\leq$ ist *reflexiv*, d.h. für alle $x \in X$ gilt $x \leq x$.

(P2) $\leq$ is *antisymmetrisch*, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

(P3) $\leq$ is *transitiv*, d.h. für alle $x, y, z \in X$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$ gilt auch $x \leq z$.

Definition. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

(a) Sei $A \subseteq X$. Eine Element $x \in X$ heißt *obere Schranke* von A, falls $a \leq x$ für alle $a \in A$ gilt.

(b) Ein Element $x \in X$ heißt *maximal*, wenn es kein Element $y \in X \setminus \{x\}$ mit $x \leq y$ gibt.

(c) Eine Teilmenge $C \subseteq X$ heißt *Kette*, falls für alle $a, b \in C$ mindestens eine der Bedingungen $a \leq b$ und $b \leq a$ erfüllt ist.

Das *Lemma von Zorn* ist ein wichtiges Resultat aus der Mengentheorie. Es lautet wie folgt:

Theorem (Lemma von Zorn)**.** *Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wenn jede Kette $C \subseteq X$ eine obere Schranke in X besitzt, dann besitzt X ein maximales Element.*

Das Lemma von Zorn hat eine Vielzahl von Anwendungen in Algebra und Analysis. In der folgenden Aufgabe benutzen wir das Lemma um die Existenz von Orthonormalbasen in Hilberträumen zu beweisen.

22. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $F \subseteq H$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie: Es gibt eine Orthonormalbasis E von H mit $E \supseteq F$. (5*)

Bemerkung: Das ist überhaupt nicht schwer. Sie müssen sich nur eine geeignete partiell geordnete Menge definieren, auf die Sie das Lemma von Zorn anwenden können. Dann folgt die Behauptung sofort aus einem Satz in der Vorlesung.

Falls Sie auf den Geschmack gekommen sind, können Sie zum Beispiel auch noch die folgenden Aussagen mit Hilfe des Lemmas von Zorn beweisen:

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $v_0 \in V$. Dann gibt es eine konvexe Menge $K \subseteq V$ mit folgenden Eigenschaften:
  - $v_0 \notin K$.
  - Für jede konvexe Menge $\tilde{K} \supseteq K$ gilt entweder $\tilde{K} = K$ oder $v_0 \in \tilde{K}$.