UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 23.06.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 11+7*

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 9

20. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit komplexwertigen Einträgen. Wir definieren $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch $T(x) = Ax$. Geben Sie eine Formel für T^* an und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um T^* handelt. (4)

21. Es sei $k \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$ und $T : L^2([0,1], \mathbb{C}) \to L^2([0,1], \mathbb{C})$ definiert durch (2)

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

Es muss nicht gezeigt werden, dass $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1], \mathbb{C}))$. Geben Sie eine Formel für T^* an und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um T^* handelt.

22. Es sei H ein Prä-Hilbertraum. Zeigen Sie: Ist $P \in \mathcal{L}(H)$ eine orthogonale Projektion, so ist auch die komplementäre Projektion Q eine orthogonale Projektion. (1)

23. (a) Es sei $H = L^2([-1,1], \mathbb{C})$, $G = \text{span}\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei $f_1(x) = e^{ix}, f_2(x) = 1, f_3(x) = e^{ix} + e^{-ix}$. Nun sei $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie das Proximum von f in G (2)

(b) Es sei H wie oben und $G = \{f \in H : f(-x) = f(x) \text{ für fast alle } x \in [-1,1]\}$. Geben Sie eine Abbildungsvorschrift für das Proximum in G an. (2*)

(c) Es sei H ein Hilbertraum und $g \in H$ so, dass $||g|| = 1$. Sei $G = \text{span}(g)$. Geben Sie eine allgemeine Formel für die orthogonale Projektion von $f \in H$ auf G und auf $G^\perp$ an. (2)

24. In dieser (Bonus-)Aufgabe wollen wir die Existenz eines sogenannten bedingten Erwartungswerts zeigen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nun sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-Sigma-Algebra. Zeigen Sie, dass $G = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu\,|_{\mathcal{B}})$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist($*$). Wenn das getan ist, zeigen Sie, dass zu jedem $f \in H$ ein $g \in G$ existiert sodass (3*)

$$\int_B f d\mu = \int_B g\, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Mit etwas Maßtheorie lässt sich auch die Eindeutigkeit zeigen, wobei Eindeutigkeit hier fast überall zu verstehen ist . Falls $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, so nennt man f Zufallsvariable und $g := \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ den bedingten Erwartungswert von f. Man veranschauliche sich, dass im Falle $\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset\}$ gilt $g(x) = \mathbb{E}(f) := \int f d\mu$ für fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis zu ($*$): Man kann sich bei diesem Beweis verkünsteln, indem man Resultate aus der Maßtheorie verwendet. Eigentlich aber muss man hier nur Resultate aus der Funktionalanalysis verwenden (und die erforderliche Maßtheorie steckt in diesen bereits drin)