Nachtrag zu Übung 4

Aufgabe 8 Ich hatte versprochen, eine Idee für einen trickreichen Beweis der Beobachtungen zu geben: Sei $v \in V$, $T \in \mathcal{L}(U, W)$. Wir hatten bereits gezeigt, dass für jede Folge $(u_n) \subset U$ die gegen v konvergiert, die Folge $(T(u_n))$ eine Cauchy-Folge ist. Noch zu zeigen war dann, dass jede Folge $(u_n) \subset U$, die v approximiert, denselben Grenzwert liefert. Und hier wird's anders als ich gezeigt habe: Seien $(u_n), (v_n) \subset U$ sodass $u_n \to v$, $v_n \to v$. Dann betrachte

$$w_n := \begin{cases} u_k & n = 2k \\ v_k & n = 2k+1 \end{cases},$$

also $w = (v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, ...)$. Nun konvergiert w auch gegen v und damit ist $(T(w_n))$ Cauchy. Somit hat $(T(w_n))$ einen Grenzwert. Aber sowohl $(T(v_n))$ als auch $(T(u_n))$ sind Teilfolgen von $(T(w_n))$. Teilfolgen einer konvergenten Folge haben aber dieselben Grenzwerte wie die Folge.

Aufgabe 9 Zu zeigen ist, dass

$$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

zusammen mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

einen Hilbertraum bildet. Dazu sollen wir zeigen, dass die Reihe in der Definition absolut konvergiert. Die Konvergenz der Reihe würde zeigen, dass der gegebene Kandidat für ein Skalarprodukt wohldefiniert ist. Daher sollten wir das zuerst nachprüfen. Sei $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |\overline{x_n} y_n| = \sum_{n=1}^{N} |\overline{x_n}||y_n| = \sum_{n=1}^{N} |x_n||y_n|$$

Viele benutzen an diesem Punkt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{K}^N$. Ich persönlich hab im Trainingscamp zeigen müssen, dass man für nichtnegative Zahlen a, b hat, dass $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (Kennt ihr das auch ?). Und weil die Ungleichung so schön ist (und ziemlich sicher am Ende des Semesters noch vorkommen wird) hier ein anderer Weg:

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |y_n|^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)$$

Ganz rechts steht jetzt eine obere Schranke der Partialsummen, die nicht von N abhängt. Eine Reihe mit nichtnegativen Summanden konvergiert aber genau dann wenn die Partialsummen beschränkt sind. Und letzteres ist wohl der Fall. Als nächstes zeigen wir, dass der Kandidat von oben auch tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Im folgenden seien stets $x = (x_n)$ und $y = (y_n)$.

- (I1) $< x, x >= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0$. Gleichheit gilt hier nur falls $|x_n|^2 = 0$ für jedes n und daraus lässt sich folgern dass $x = 0$ (hier geht die positive definitheit des Absolutbetrages - der Norm auf $\mathbb{K}$ - entscheidend ein.
- (I2) $< x, \lambda y >= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} (\lambda y)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} \lambda y_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n = \lambda < x, y >$.
- (I3) $< x, y+z >= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}(y+z)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}(y_n+z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n + \overline{x_n} z_n =< x, y > + < x, z >$, wobei ich im letzten Schritt die Summe auseinander gezogen hab.
- (I4) $\overline{< y, x >} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n} x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{y_n} x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x_n} =< x, y >$.

Damit haben wir ein Skalarprodukt und eine induzierte Norm

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Nun zur Vollständigkeit. Wir haben schon gezeigt, dass $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ vollständig ist. Man findet in dem Beweis hier mit Sicherheit einige Techniken wieder! Es sei $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ d.h zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sodass für $k, m \geq N_\epsilon$ stets gilt $||x^{(k)} - x^{(m)}|| < \epsilon$. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und betrachte die Folge $(x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Dann gilt für $k, m \geq N_\epsilon$

$$|x_n^{(m)} - x_n^{(k)}| = \sqrt{|x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^2} = ||x^{(m)} - x^{(k)}|| < \epsilon.$$

Mit anderen Worten: $(x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ wir betrachten aber nur vollständige Körper $\mathbb{K}$. Also konvergiert $(x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert, den wir sehr suggestiv mit x_n bezeichnen wollen. Wir behaupten dann dass die Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quadratsummierbar ist und der $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$-Grenzwert der Folge $x^{(m)}$ ist. Zur Quadratsummierbarkeit: Betrachte eine Partialsumme.

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |x_n^{(m)}|^2 \leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)}|^2$$

$$= \liminf_{m\to\infty} ||x_{(m)}||^2 =: C < \infty$$

weil Cauchy-Folgen (sogar in Prähilberträumen) beschränkt sind. Man beachte, dass ich im ersten Schritt nur die Konvergenz von jedem einzelnen (der endlcih vielen) Summanden benutzt hab und der limes inferior kommt wieder ins Spiel, weil ich mit nach der Abschätzung wieder nicht sicher sein kann, dass der Limes existiert (Danke nochmal für die Frage in der Übung). Wiederum implizieren beschränkte Partialsummen die Konvergenz der Reihe. Im Folgenden zeigen wir dann endlich $||x^{(m)} - x|| \to 0$. Sei $\epsilon > 0$ und $m \geq N_\epsilon$, wobei N_ϵ wie oben definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(m)} - x_n|^2 = \lim_{k\to\infty, k\geq N_\epsilon} \sum_{n=1}^{N} |x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^2 &\leq \liminf_{k\to\infty, k\geq N_\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^2 \\ &= \liminf_{k\to\infty, k\geq N_\epsilon} ||x^{(m)} - x^{(k)}||^2 < \epsilon^2\end{aligned}$$

und daher nach $(N \to \infty)$

$$||x^{(m)} - x||^2 < \epsilon^2$$

für $m \geq N_\epsilon$. Das zeigt die Behauptung.

Aufgabe 10 Formen wir zunächst die zweite Behauptung ein bisschen um:

$$\begin{array}{rcl} & ||x|| & \leq ||x+\alpha y|| \\ \Leftrightarrow & ||x||^2 & \leq ||x+\alpha y||^2 \\ \Leftrightarrow & < x,x > & \leq < x+\alpha y, x+\alpha y > = < x,x > + \overline{\alpha} < y,x > + \alpha < x,y > + |\alpha|^2 < y,y > \\ \Leftrightarrow & < x,x > & \leq < x,x > + \overline{\alpha < x,y >} + \alpha < x,y > + |\alpha|^2 ||y||^2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq 2Re(\alpha < x,y >) + |\alpha|^2 ||y||^2 \end{array}$$

Wir zeigen nun also, dass $x \perp y$ äquivalent dazu ist, dass $\Leftrightarrow 0 \leq 2Re(\alpha < x,y >) + |\alpha|^2||y||^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$. Für eine Richtung nehmen wir an, dass

$x \perp y$ also $< x, y >= 0$ was die gegebene Gleichung zu $0 \leq |\alpha|^2 ||y||^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ vereinfacht. Diese Gleichung ist aber tatsächlich immer erfüllt. Für die andere Richtung nehmen wir an dass die Gleichung für alle α stimmt. Wähle - für natürliches n - $\alpha = \frac{1}{n}$ und erhalte

$$0 \leq \frac{2}{n} Re(< x, y >) + \frac{1}{n^2} ||y||^2$$

und wenn wir mit n multiplizieren heißt das für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq 2\Re(< x, y >) + \frac{1}{n} ||y||^2$$

und damit für $n \to \infty$

$$0 \leq 2Re(< x, y >)$$

Man bekommt auch mit $\alpha = -\frac{1}{n}$ und $n \to \infty$

$$0 \leq -2Re(< x, y >)$$

und beides zusammen sagt uns $Re(< x, y >) = 0$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist hier alles gemacht .Falls nicht, macht man weiter: Mit $\alpha = \frac{i}{n}$ bekommt man

$$0 \leq -2Im(< x, y >)$$

und mit $\alpha = \frac{-i}{n}$ hat man dann schließlich

$$0 \leq 2Im(< x, y >)$$

woraus man dann auch folgert dass $Im(< x, y >) = 0$. Abschließend eine kleine Bemerkung: Dieses Vorgehen ist typisch für Ungleichungen, die unterschiedliche Potenzen eines Parameters involvieren: Man setzt besonders kleine (oder Große) Werte für den Parameter ein und schaut, was für Informationen man aus der Ungleichung rausziehen kann. Die Literatur beweist diese Aufgabe im Fall $y \neq 0$ etwas kreativer und wählt

$$\alpha = \frac{-\overline{< x, y >}}{||y||^2}.$$

Damit bekommt man nämlich :

$$0 \leq -2| < x, y > |^2 \frac{1}{||y||^2} + \frac{| < x, y > |^2}{||y||^4} ||y||^2 = -\frac{| < x, y > |^2}{||y||^2}.$$

Dies ist ein Widerspruch wenn $< x, y > \neq 0$.