Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 12

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 02.06.2017

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 7

18. Es sei $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ die Menge aller abbrechenden reellwertigen Folgen mit dem Skalarprodukt (3*)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Dass es sich um ein Skalarprodukt handelt, muss nicht gezeigt werden. Weiter sei $K := \left\{x \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \geq 1\right\}$. Zeigen Sie: K ist eine abgeschlossene, konvexe Menge von $c^{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aber es gibt in K kein Element mit minimaler Norm. Insbesondere ist $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ bezüglich dieses Skalarproduktes kein Hilbertraum.

Lösungsvorschlag: Es sei $T : c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k}. \tag{1}$$

Wir zeigen kurz: $T \in \mathcal{L}(c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$. Dass T linear ist, ist einsichtig. T ist beschränkt, denn

$$|T(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} ||x||. \tag{2}$$

Nun ist $K = T^{-1}([1, \infty))$. K ist damit abgeschlossen, weil $[1, \infty)$ abgeschlossen ist und Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen abgeschlossen sind. Nun zur Konvexität: Seien $x, y \in K$. Wir zeigen $tx + (1-t)y \in K$. Dazu berechnen wir

$$T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y) \geq t + (1-t) = 1. \tag{3}$$

Daraus folgt $tx + (1-t)y \in T^{-1}([1, \infty)) = K$. Nun nehmen wir an $x \in K$ hat minimale Norm und definiere $d := ||x||$. Setze jetzt

$$\widetilde{K} = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \geq 1\right\} \tag{4}$$

Analog zu oben kann man zeigen, dass $\widetilde{K}$ abgeschlossen und konvex ist. Der Unterschied: $\widetilde{K}$ ist eine Teilmenge eines Hilbertraumes! Nach Aufgabe 17 a) hat damit $\widetilde{K}$ ein Element $y \in \widetilde{K}$ minimaler Norm. Untersuchen wir mal die Norm von y

$$||y|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \geq \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \geq \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}\right| = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \tag{5}$$

Finden wir nun ein Element $z \in \widetilde{K}$ sodass $||z|| = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}}$ so muss gelten $z = y$ wegen der Eindeutigkeit und der Tatsache, dass dann z minimale Norm haben muss. Ein solches z gibt es:

$$z_k = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k}. \tag{6}$$

Es gilt, dass $z \in \widetilde{K}$, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{k} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = 1 \tag{7}$$

und nun

$$||z|| = \frac{6}{\pi^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}}, \tag{8}$$

womit z wirklich minimale Norm hat. Beobachten wir nun, dass $K \subset \widetilde{K}$ und deswegen

$$\sqrt{\frac{6}{\pi^2}} = ||z|| = \inf_{u \in \widetilde{K}} ||u|| \leq \inf_{u \in K} ||u|| = ||x|| \tag{9}$$

Würde diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt sein, so wäre wegen der Eindeutigkeit $z = x$, was aber nicht sein kann, weil $z \notin c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ weil z niemals abbricht. Diesen Widerspruch wollen wir erzeugen. Dafür zeigen wir also die Gleichheit

$$\inf_{u \in K} ||u|| = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \tag{10}$$

Definiere dafür $(u^{(n)})$ durch

$$u_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} & k \leq n \\ 0k > n \end{cases} \tag{11}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $u^{(n)} \in K$ und

$$||u^{(n)}|| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}} \tag{12}$$

sodass

$$\inf_{u \in K} ||u|| \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}} \tag{13}$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegegn $\sqrt{\frac{6}{\pi^2}}$ strebt, ist die Gleichheit oben gezeigt (die andere Ungleichung folgt nämlich schon mit den obigen Überlegungen)

19. Die kommende Aufgabe beschäftigt sich mit dem Satz von Fischer-Riesz. (4*)

Es sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis E. Es sei J die Abbildung aus dem Satz von Fischer-Riesz Sei $T : H \to H$ linear und stetig. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & H \arrow[d, "J"] \\ \ell^2(E, \mathbb{K}) \arrow[r, "JTJ^{-1}"'] & \ell^2(E, \mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Sei nun $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$. Sei $m \in C^0([0,1], \mathbb{C})$ und $T : H \to H, T(f)(x) = m(x)f(x)$. Berechnen Sie $JTJ^{-1}e_f$ für alle $f \in E$, wobei e_f das Element von $\ell^2(E, \mathbb{K})$ ist, was nur an der f-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen hat. Bemerkung: In einem gewissen Sinne berechnet man hier eine verallgemeinerte Matrixdarstellung des Operators T bezüglich der Orthonormalbasis E.

Lösungsvorschlag:

$$JTJ^{-1}e_f = JT(f) = J(mf) = (\langle g, mf \rangle)_{g \in E} = \left(\int \overline{g} fm \, dx \right)_{g \in E} = \sum_{g \in E} \int \overline{g} fm \, dx \, e_g \tag{14}$$

Warum berechnet das eine Art Matrixdarstellung ? Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ eine ONB. Dann ist die Darstellungsmatrix A von T gegeben durch

$$T(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k. \tag{15}$$

und $a_{k,i} = \langle e_k, T(e_i) \rangle$ In unserer Situation, falls $T \in \mathcal{L}(H)$, ist

$$JTJ^{-1}(e_f) = \sum_{g \in E} a_{g,f} e_g \tag{16}$$

wobei $a_{g,f} = \langle g, T(f) \rangle$.

Man bemerke die Parallelen.