Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück

Abgabe: Mittwoch, 25.10.2017

Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+8*

Übungen Maßtheorie: Blatt 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei I eine höchstens abzählbare Menge. Wenn für jedes $i \in I$ ein $A_i \in \mathcal{A}$ gegeben ist, dann gilt $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$. (2)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist jede höchstens abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. (2)

(c) Sei $M := \{1, \dots, 10\}$ und sei $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ gegeben durch (2)

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset, \\ \max A & \text{falls } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Dann ist μ ein Maß.

(d) Sei $M := \{1, \dots, 10\}$. Die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$, $\mu(A) = \sum_{k\in A} \frac{1}{k}$, ist ein Maß. (2)

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ sei eine Menge $A_{m,n} \in \mathcal{A}$ gegeben. Dann gilt $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{m,n} \in \mathcal{A}$. (2)

(f) Sei Ω eine nichtleere Menge und seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ derart, dass $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ gilt. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. (2)

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Mengen

$$\mathcal{O} := \{M \subseteq \mathbb{R}^n : \ M \text{ ist offen}\}, \quad \mathcal{C} := \{M \subseteq \mathbb{R}^n : \ M \text{ ist abgeschlossen}\},$$

$$\mathcal{K} := \{K \subseteq \mathbb{R}^n : \ K \text{ ist kompakt}\}, \quad \mathcal{H} := \{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i) : \ -\infty < a_i < b_i < \infty \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Nach Definition der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O})$.

(a) Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C})$. (2)
Tipp: Beweisen Sie zuerst, dass $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{O})$ und $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ gilt.

(b) Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$. (2)

(c) Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{H})$. (4)

3. Betrachten Sie das Mengensystem $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ ist höchstens abzählbar}\}$ auf $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{A})$. (4*)

(b) Geben Sie ein endliches Maß $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ an, welches nicht die konstante Null-Abbildung ist. (4*)