Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 15.11.2017

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+8*

Übungen Maßtheorie: Blatt 4

9. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist die sogenannte *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_A$, welche durch (2)

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^C \end{cases}$$

gegeben ist, Borel-messbar.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar. (2)

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Lebesgue-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar. (2)

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Außerdem seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Wir definieren $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch (2)

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in F, \\ g(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus F. \end{cases}$$

Dann ist auch h Borel-messbar.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an höchstens endlich vielen Stellen unstetig. Dann ist f Borel-messbar. (2)

10. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Wir definieren $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch (5)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung f ist $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$-messbar.

11. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung (d.h. $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$). Wie üblich bezeichne $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß. (2)

Bestimmen Sie das Bildmaß $f(\lambda)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben und sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß. Bestimmen Sie das Bildmaß $f(\lambda)$. (3)

12. Seien $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ und $\Omega' := \Omega \times \Omega$ jeweils mit ihrer Potenzmenge als σ-Algebra versehen. Es sei $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega') \to [0, \infty]$ das Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß, welches durch $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega'|}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega')$ gegeben ist.

(a) Betrachten Sie die Abbildung $f : \Omega' \to \Omega$, $(a, b) \mapsto a$. Bestimmen Sie das Bildmaß $f(\mathbb{P})$. (3*)

(b) Sei $\mathbb{R}$ mit der Borel-σ-Algebra ausgestattet. Betrachten Sie die Abbildung $s : \Omega' \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ und bestimmen Sie das Bildmaß $s(\mathbb{P})$. (5*)