Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 29.11.2017

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+6*

Übungen Maßtheorie: Blatt 6

16. (a) Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und sei $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$. (4)

(b) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $p_n \in [0,\infty]$ gegeben; dann definiert $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$, $\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$, ein Maß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Sei $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$. (4)

(c) Sei Ω eine nicht-leere Menge und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Algebra auf Ω. Es sei $x \in \Omega$ und es bezeichne $\delta_x : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ das Dirac-Maß, welches durch (4)

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ gegeben ist. Sei $f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Berechnen Sie $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\delta_x$.

(d) Bezeichne $\lambda : \mathcal{B}((0,\infty)) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Maß. Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch (4)

$$f(x) = \frac{1}{\lceil x \rceil^2} \qquad \text{für alle } x \in (0,\infty);$$

hierbei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist, d.h. $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} :\ x \leq n\}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{M}_+\big((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty))\big)$ gilt und berechnen Sie $\int_{(0,\infty)} f \,\mathrm{d}\lambda$.

17. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := n \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie, falls existent, die beiden Zahlen $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ und $\int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda$. (4)

Hierbei bezeichnet $\lambda : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Maß und $\lim_{n\to\infty} f_n$ den punktweisen Limes der Funktionenfolge (f_n), sofern dieser existiert.

Bemerkung: Was lernen Sie aus dem Ergebnis der Berechnung?

18. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume, sei $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0,\infty]$ ein Maß und sei $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine messbare Abbildung. Es bezeichne $\varphi(\mu_1) : \mathcal{A}_2 \to [0,\infty]$ das Bildmaß von μ_1 unter φ. (6*)

Sei $f \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Zeigen Sie: Es ist $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und es gilt $\int_{\Omega_2} f \,\mathrm{d}\varphi(\mu_1) = \int_{\Omega_1} f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu_1$.

Tipp: Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale zunächst für den Fall, dass f eine messbare Indikatorfunktion ist.