Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+7*

Übungen Maßtheorie: Blatt 7

19. In jeder der folgenden Teilaufgaben ist jeweils ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Entscheiden Sie jeweils, ob f integrierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls das Integral $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß bezeichne, und es sei $f(n) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß bezeichne, und es sei $f(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

(c) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ durch $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gegeben sei. Zudem sei $f(n) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

(d) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_{-1})$, wobei δ_{-1} das Dirac-Maß im Punkt -1 bezeichne, und es sei $f(x) = e^x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (2)

(e) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([1, \infty), \mathcal{B}([1, \infty)), \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichne, und es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [1, \infty)$. (4)
Tipp: Versuchen Sie f durch eine Funktion abzuschätzen, deren Integral Sie berechnen können.

20. Es sei $[0, 1]$ mit der Borel-σ-Algebra und mit dem Lebesgue-Maß λ versehen.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. (3)

Wir definieren nun eine Funktion $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ für alle $x \in [0, 1]$.

(b) Zeigen Sie, dass f messbar ist. (2)

(c) Berechnen Sie $\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\lambda$. (3)
Hinweis: Sei dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\lambda$ mit dem Riemann-Integral von g über $[0, 1]$ übereinstimmt.

21. Es sei $[0, 1]$ mit der Borel-σ-Algebra und mit dem Lebesgue-Maß λ versehen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch (4*)

$$f_n = \begin{cases} n \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n}]}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Berechnen Sie, falls existent, die Zahlen $\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\lambda$ und $\int_{[0,1]} \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda$.

22. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume, sei $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0, \infty]$ ein Maß und sei $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine messbare Abbildung. Es bezeichne $\varphi(\mu_1) : \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ das Bildmaß von μ_1 unter φ. (3*)

Sei $f : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Zeigen Sie: Es ist $f \circ \varphi : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ ebenfalls integrierbar und es gilt $\int_{\Omega_2} f \, \mathrm{d}\varphi(\mu_1) = \int_{\Omega_1} f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu_1$.