Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+15*

Übungen Maßtheorie: Blatt 8

23. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\emptyset \neq B \in \mathcal{A}$. Zudem bezeichne $\mu|_B$ die Einschränkung von μ auf die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}|_B$. Es sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f|_B \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A}|_B)$ genau dann, wenn $f \mathbb{1}_B \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ gilt. (4)

(b) Es gilt $f|_B \in \mathcal{M}_+(B, \mathcal{A}|_B)$ genau dann, wenn $f \mathbb{1}_B \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ gilt. In diesem Fall ist $\int_B f \,\mathrm{d}\mu|_B = \int_\Omega f \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu$. (4)

(c) Es gilt $f|_B \in \mathcal{L}_1(B, \mathcal{A}|_B, \mu|_B)$ genau dann, wenn $f \mathbb{1}_B \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt. In diesem Fall ist $\int_B f|_B \,\mathrm{d}\mu|_B = \int_\Omega f \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu$. (3)

24. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Außerdem sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge messbarer Mengen mit $A_n \uparrow A \subseteq \Omega$. Dann gilt $\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \to \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. (2)

(b) Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F(t) := \int_{[0,1]} f(t, \cdot) \,\mathrm{d}\lambda$ für alle $t \in [0,1]$, wobei λ wie üblich das Lebesgue-Maß bezeichnet. Dann ist F stetig. (2)

(c) Die Abbildung $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$, ist wohl-definiert und stetig. (2)

25. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie: μ-fast überall in Ω gilt die Eigenschaft $|f| < \infty$. (3)

26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $I = [a,b]$ mit der Borel-σ-Algebra und dem Lebesgue-Maß λ versehen. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $B \in \mathcal{B}(I)$ gibt es eine Folge stetiger Funktionen $f_n : I \to [0,1]$, die λ-fast überall gegen $\mathbb{1}_B$ konvergiert. (8*)

(b) Für jedes $B \in \mathcal{B}(I)$ gibt es eine Folge stetiger Funktionen $f_n : I \to [0,1]$ mit der Eigenschaft $\int_I |f_n - \mathbb{1}_B| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$ für $n \to \infty$. (2*)

(c) Für jedes $f \in \mathcal{L}_1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ gibt es eine Folge stetiger Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\int_I |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$ für $n \to \infty$. (5*)