Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+8*

Übungen Maßtheorie: Blatt 9

27. (a) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \frac{\sin(ne^{nx\cos x})+nx}{n}$ gegeben. Berechnen Sie, sofern existent, (4)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\lambda.$$

(b) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und es sei $f : [e,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Berechnen Sie $\int_{[e,\infty)} f \, \mathrm{d}\lambda$. (4)

Tipp: Berechnen Sie zunächst $\int_{[e,n]} f \, \mathrm{d}\lambda$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es bezeichne $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty]$ das zwei-dimensionale Lebesgue-Maß und es seien $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1, x_2 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral $\int_B \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\lambda$. (4)

(d) Sei $\Omega = \{1, \dots, 10\}$, sei $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ das Maß, welches durch $\mu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n}$ für alle $A \subseteq \Omega$ gegeben ist. Zudem sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $f(n) = -n^2$ für alle $n \in \Omega$ gegeben. Berechnen Sie, sofern existent, das Integral $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$. (4)

(e) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch (4)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

28. Seien $[a,b]$ und $[c,d]$ zwei kompakte reelle Intervalle, die beide aus mehr als einem Punkt bestehen. Sei $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ eine monoton steigende bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass φ und φ^{-1} beide stetig differenzierbar sind. Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß.

(a) Zeigen Sie, dass $\int_a^b f(\varphi(x))\mathrm{d}x = \int_c^d f(x) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \mathrm{d}x$ für alle stetigen Funktionen $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ gilt. (2*)

(b) Zeigen Sie, dass $\int_{[a,b]} f \circ \varphi \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[c,d]} f \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} \, \mathrm{d}\lambda$ für jede Borel-messbare Indikatorfunktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ gilt. (4*)

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 26(a) von Blatt 8. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\varphi^{-1}(B)$ für jede Nullmenge $B \in \mathcal{B}([c,d])$ wieder eine Nullmenge ist (was an der speziellen Struktur von φ liegt!).

(c) Geben Sie eine explizite Formel für das Bildmaß $\varphi(\lambda)$ an. (2*)

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 18 von Blatt 6.