Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 23.10.2014

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 1

1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ ein dynamisches System. Ferner sei E die Menge der Equilibria, d. h.

$$E = \{x \in M : \Phi(t, x) = x \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Unter Trajektorien versteht man Wege $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \gamma(t) = \Phi(t, x)$ mit einem $x \in M$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge E ist abgeschlossen. (1)

(b) Eine Trajektorie, welche durch einen Punkt $x \in M \setminus E$ verläuft, kann von dort kein Equilibrium in endlicher Zeit erreichen. (2)

(c) Gilt für zwei Punkte $x, y \in M$, dass

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x) = y,$$

so ist $y \in E$. (2)

2. Es seien $J = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ und $\varphi(t_0) \geq 0$. Ferner gelte

$$\dot{\varphi}(t) \leq -\alpha\varphi(t) + \beta$$

für alle $t \in J$, wobei $\alpha, \beta > 0$ Konstanten sind.
Man zeige, dass dann

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0) + \frac{\beta}{\alpha}$$

für alle $t \in J$ gilt. (5)