Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 13.11.2014

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 4

1. Betrachtet wird das Epidemiemodell mit Mortalität und konstantem Geburtenzuwachs

$$\begin{cases} \dot{u} = b - auv - mu, & t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \geq 0, \\ \dot{v} = auv - cv - \mu v, & t \geq 0, \quad v(0) = v_0 \geq 0, \\ \dot{w} = cv - mw, & t \geq 0, \quad w(0) = w_0 \geq 0, \end{cases}$$

mit den Konstanten $a, b, c, m > 0$ und $\mu \geq m$.
Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass dieses Anfangswertproblem eine eindeutige, für alle $t \geq 0$ existierende nichtnegative Lösung besitzt.
Bestimmen Sie alle biologisch relevanten Equilibria und untersuchen Sie deren Stabilität mit Hilfe des Prinzips der linearisierten Stabilität. (4)

2. Betrachtet wird das (normalisierte) Virenmodell (vgl. Serie 3, Aufgabe 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = z - \xi x, \\ \dot{y} = \sigma - \varrho y - xy, \\ \dot{z} = xy - z, \end{cases}$$

mit positiven Parametern $\xi, \sigma, \varrho > 0$.
Die Equilibria sind aus Serie 3, Aufgabe 1, bekannt:

$$(x_*, y_*, z_*) = \left(0, \frac{\sigma}{\varrho}, 0\right) \quad \text{und} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\sigma}{\xi} - \varrho, \xi, \sigma - \varrho\xi\right),$$

wobei das Equilibrium $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nur für den Fall $\sigma > \varrho\xi$ biologisch relevant ist.
Untersuchen Sie die Stabilität der beiden Equilibria mit Hilfe des Prinzips der linearisierten Stabilität.
Hinweis: Für die Untersuchung des Equilibriums $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ist das Routh-Hurwitz-Kriterium sehr nützlich. (6)