Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 27.11.2014

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 6

1. Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des Equilibriums $(0,0)$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2 - \frac{1}{2}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{5}x^2 y, \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie auch, dass jede Lösung des Systems global nach rechts existiert. (4)

2. Betrachtet wird das (normalisierte) Virenmodell (vgl. Serie 4, Aufgabe 2)

$$\begin{cases} \dot{x} = z - \xi x, \\ \dot{y} = \sigma - \varrho y - xy, \\ \dot{z} = xy - z, \end{cases} \tag{A}$$

mit positiven Parametern $\xi, \sigma, \varrho > 0$ und $\sigma > \xi\varrho$.
Es ist bereits bekannt, dass

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\sigma}{\xi} - \varrho, \xi, \sigma - \varrho\xi\right),$$

das einzige Equilibrium in $(0,\infty)^3$ ist und dieses ist asymptotisch stabil.
Zeigen Sie, dass mit

$$\Phi(x,y,z) = x - \bar{x}\ln x + y - \bar{y}\ln y + z - \bar{z}\ln z, \quad x,y,z > 0,$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für (A) in $(0,\infty)^3$ gegeben ist, und zeigen Sie die asymptotische Stabilität des Equilibriums $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mittels der direkten Methode.
Zeigen Sie auch, dass $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ global asymptotisch stabil ist in $(0,\infty)^3$. (6)