Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester
2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 8

1. Gegeben ist das Räuber-Beute-Modell vom Holling-Typ (u ist die Beute, v ist der Räuber):

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \lambda u^2 - vf(u), \\ \dot{v} = -\mu v + vf(u). \end{cases}$$

Dabei sind $\mu, \lambda > 0$ Konstanten, $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $f' > 0$ auf $(0,\infty)$ und $f(0) = 0$.

(a) Beweisen Sie mit Invarianz-Techniken, dass alle Lösungen des Differentialgleichungssystems mit Anfangswerten $(u_0, v_0) \in [0,\infty)^2$ global nach rechts beschränkt sind. (2)

(b) Zeigen Sie, dass es genau ein Koexistenzgleichgewicht (d. h. in $(0,\infty)^2$) gibt, wenn $\mu < f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ gilt. (2)

(c) Es gelte nun sogar

$$f\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \leq \mu < f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Zeigen Sie, dass das eindeutig bestimmte Koexistenzgleichgewicht asymptotisch stabil ist. (2)

2. Das System

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - y, \\ \dot{y} = \sigma x - \gamma y, \end{cases}$$

mit $g(x) = -x(x-a)(x-b)$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ und $\sigma, \gamma > 0$ heißt *Fitzhugh-Nagumon-Gleichung* und spielt in der Theorie der Nervensysteme eine wichtige Rolle. Zeigen Sie, dass es zu jedem Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleles Rechteck R gibt, welches positiv invariant ist und die Menge $\{(x(t;x_0,y_0), y(t;x_0,y_0)) : t \geq 0\}$ enthält (d. h. die zugehörige Lösung ist für $t \geq 0$ in R „eingesperrt“).
Tipp: Betrachten Sie das Phasenportät und bestimmen Sie insbesondere die Monotoniebereiche für $x(t)$ und $y(t)$. (4)