Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 15.01.2015

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 11

1. In $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wird das folgende System betrachtet:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^3 - y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2, \\ \dot{y} = -y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^3 + x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2. \end{cases} \tag{A}$$

Man kann zeigen, dass (A) in Polarkoordinaten die Gestalt

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)^3, \\ \dot{\varphi} = (r-1)^2, \end{cases} \tag{B}$$

besitzt.

(a) Bestimmen Sie alle Equilibria in G und diskutieren Sie für eine beliebige Lösung das Verhalten von $r(t)$ für $t \to \infty$. (2)

(b) Leiten Sie mittels Separation der Variablen eine Formel für φ in Abhängigkeit von r her und diskutieren Sie das Verhalten von $\varphi(t)$ für $t \to \infty$. (2)

(c) Sei $(x(t), y(t))$ eine beliebige Lösung von (A) in G. Bestimmen Sie deren $\omega-$Limesmenge. Kann die Lösung für $t \to \infty$ konvergieren? (1)

2. Betrachtet wird in $G = \mathbb{R}^2$ das System

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 - \frac{1}{4}x(y - 1 + 2x^2), \\ \dot{y} = -2(1+y)x. \end{cases} \tag{C}$$

(a) Bestimmen Sie alle Equilibria von (C).
Tipp: Der Punkt $(1, -1)$ ist ein Equilibrium. (1)

(b) Zeigen Sie, dass die Mengen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - 2x^2\}$ invariant sind.
Tipp: Verwenden Sie die Subtangentialbedingung für die zweite Menge. (1)

(c) Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1 - 2x^2\}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\Omega}$ invariant ist. (1)

(d) Überprüfen Sie, dass $V(x, y) = -x^2(1 + y) - \frac{y^2}{2}$ eine strikte Ljapunov-Funktion für (C) in Ω ist. (1)

(e) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ljapunov-Funktion V die Stabilität des Equilibriums $(0, 0)$. Für welche Anfangswerte $(x_0, y_0) \in \Omega$ konvergiert die zugehörige Lösung von (C) gegen den Punkt $(0, 0)$ für $t \to \infty$? (1)