Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.12.2014

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 9

1. Sei $f \in C^{1-}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$, und es gelte $\nabla\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \Phi^{-1}(a)$ (d. h. a ist regulärer Wert von Φ).
Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

i) $D := \Phi^{-1}((-\infty, a])$ ist positiv invariant für $\dot{u} = f(u)$.

ii) $(\nabla\Phi(x)|f(x)) \leq 0$ für alle $x \in \Phi^{-1}(a) = \partial D$.

Hinweise: Zum Nachweis von „ i)→ ii)“ argumentiere man indirekt.
Um „ ii)→ i)“ zu zeigen, betrachte man das gestörte Problem

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - \varepsilon\nabla\Phi(u), \\ u(0) = \xi, \end{cases}$$

mit $\varepsilon > 0$ und verwende die stetige Abhängigkeit der Lösung von ε; auch hier argumentiere man indirekt. (5)

2. Betrachtet wird das folgende (skalierte) System zur Modellierung der Konkurrenz zweier Arten:

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \alpha_1 u^2 - uv, \\ \dot{v} = \beta v - \alpha_2 v^2 - uv, \\ u(0) = u_0 \geq 0,\ v(0) = v_0 \geq 0, \end{cases}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ Konstanten.
Bestimmen Sie alle biologisch relevanten Equilibria und untersuchen Sie diese auf Stabilität. Ignorieren Sie dabei die Fälle, bei denen das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht anwendbar ist. Diskutieren Sie mit Hilfe von Invarianz-Techniken das globale Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit der Parameter (z. B. Wann gewinnt u, wann v?) und skizzieren Sie das Phasenporträt in jedem der qualitativ verschiedenen Fälle. (5)