Die Übungsblätter sind in Zweiergruppen zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 04.05.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2017
Punktzahl: 30

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 2

1. Sei $f(t,x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Löst x die Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ und löst y die Differentialgleichung $y' = -1/f(t,y)$, dann stehen die Tangentialvektoren der Kurven $(t, x(t))$ und $(t, y(t))$ in Schnittpunkten senkrecht zueinander. (3)

2. Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ sei die Differentialgleichung 2. Ordnung $x'' + f(x) = 0$ gegeben. Transformieren Sie diese Gleichung in ein System 1. Ordnung und geben Sie ein nicht-konstantes erstes Integral des Systems an.
Hinweis: $f(x) = \omega^2 \sin(x)$ beschreibt das Mathematische Pendel (vgl. Vorlesung). (2)

3. Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} u' = v(u+v-1), \\ v' = u(1-u-v), \end{cases}$$

ein erstes Integral $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (Φ soll nicht-konstant sein!) und berechnen Sie alle Equilibria. Skizzieren das Phasenporträt, indem Sie einige typischen Niveaulinien sowie alle Equilibria zeichnen. Deuten Sie durch Pfeile die Richtungen der Lösungskurve an. (6)

4. Bestimmen Sie

(a) eine Lösung von $x'(t) = 4(x(t))^2 - (8t+2)x(t) + 1 + 2t + 4t^2$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $x(0) = 1/3$; verwenden Sie die Substitution $x(t) = t + 1/y(t)$; (4)

(b) eine Lösung $u\colon I_1 \to \mathbb{R}$ von $y'(t) = e^{t-y(t)-e^{y(t)}}$ für $t \in I_1$ mit $y(1) = 0$; dabei ist I_1 ein offenes Intervall mit $1 \in I_1$, welches maximal gewählt werden soll; (5)

(c) eine Lösung $u\colon I_2 \to \mathbb{R}$ von $y'(x) = 2e^{y(x)} \sin(2x)$ für $t \in I_2$ mit $y(0) = 0$; dabei ist I_2 ein offenes Intervall mit $0 \in I_2$, welches maximal gewählt werden soll; (5)

(d) eine Lösung $u\colon I_3 \to \mathbb{R}$ von $x' + x\cos t = \sin t \cos t$ für $t \in I_3$ mit $x(2\pi) = x_0 > 0$; dabei ist I_3 ein offenes Intervall mit $2\pi \in I_3$, welches maximal gewählt werden soll. (5)