

DIE ÜBUNGSBLÄTTER SIND IN ZWEIERGRUPPEN ZU BEARBEITEN UND  
VOR BEGINN DER ÜBUNG ABZUGEBEN!



UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua Marie-Luise Hein Sommersemester 2017 Punktzahl: 30
---

---

## Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 3

---

1. Wir betrachten folgende Verallgemeinerung der logistischen Gleichung  $y' = g(y)y$  mit  $y(0) = y_0$ , wobei  $y = y(t)$  die Größe einer Population (z. B. einer Bakterienkultur) in Abhängigkeit von der Zeit, naturgemäß  $y_0 \geq 0$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion sei.

Anmerkung:  $g(y) = a - by$  liefert die logistische Gleichung.

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem in einer Umgebung von  $t = 0$  eine eindeutige Lösung besitzt. (4)

(b) Beweisen Sie, dass diese Lösung  $y(t)$  im gesamten Existenzintervall  $[0, t_+)$  nicht-negativ bleibt. (4)

2. Sei  $w \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R})$  mit  $w(t_0) \geq 0$  und es gelte für alle  $t \in [t_0, t_1]$  die Ungleichung  $\dot{w}(t) \leq -c_1 w(t) + c_2$ , wobei  $c_1, c_2 > 0$  gegebene Konstanten sind. Beweisen Sie für alle  $t \in [t_0, t_1]$  die Abschätzung  $w(t) \leq w(t_0) + c_2/c_1$ .

**Hinweis:** Nutzen Sie eine ähnliche Strategie wie im Beweis des Gronwall-Lemmas 3.4. (4)

3. Man berechne eine Lösung des Anfangswertproblems  $y' = t\sqrt{1 - y^2}$ ,  $y(0) = 1$ , die von der Lösung  $y \equiv 1$  verschieden ist. Überlegen Sie sich, ob das ein Widerspruch zum Satz 2.2 ist und begründen Sie das Ergebnis. (4)

4. Genügen folgende Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  einer lokalen oder globalen Lipschitzbedingung? Die Antwort ist zu begründen!

(a)  $f(t, y) = e^{t^2} y$ , (3)

(b)  $f(t, y) = \arctan(t^2 + y)$ . (3)

5. Man zeige, dass folgende Anfangswertprobleme eine eindeutige lokale Lösung besitzen:

(a)  $x'' + \omega \sin x + \alpha x' = 0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x_1$ , mit  $\alpha, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ , (4)

(b)  $y'(x) = y(x) - 2x/y(x)$  mit  $y(1/2) = \sqrt{2}$ . (4)