Die Übungsblätter sind in Zweiergruppen zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.05.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2017
Punktzahl: 34

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 4

1. Beweisen Sie das folgende Korollar 4.2 aus der Vorlesung:
Seien $A \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. Dann hat das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

für alle $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung, d. h. $(t^-, t^+) = \mathbb{R}$. (4)

2. Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Außerdem gelte für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : f(-t,x) = -f(t,x)$. Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so ist jede Lösung $u\colon [-r,r] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $u'(t) = f(t,u(t))$ eine gerade Funktion, d. h. für alle $t \in [-r,r]$ gilt $u(t) = u(-t)$. (6)

3. Gegeben sei das Anfangswertproblem $x'' + 2x^3 = 0$ mit $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige Anfangswerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige lokale Lösung hat. (4)

(b) Weisen Sie nach, dass die Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, also für jede Lösung des Anfangswertproblems das maximale Existenzintervall $(t^-, t^+) = \mathbb{R}$ ist.
Tipp: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit x' und zeigen Sie, dass die Lösungen durch eine (von den Anfangswerten abhängige) Konstante beschränkt bleiben. (6)

4. Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{cases} u' = \sqrt{1+u^2} - u^9 + v^2(v^3 \sin u - e^v), \\ v' = u(1 - v^4 \sin u + e^v v), \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

für alle $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung besitzt, die für alle $t \geq 0$ existiert. (6)

5. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $u' = \cos u\sqrt{1+u^2} + e^{-u^2}$, $u(0) = u_0$, für jeden Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, welche für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. (4)

6. Man berechne eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = -1$, die von der Lösung $y \equiv -1$ verschieden ist. Überlegen Sie sich, ob das ein Widerspruch zum Satz 2.2 ist und begründen Sie das Ergebnis. (4)