Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 16.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 4*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 8

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $T\colon \Sigma_\theta \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X. Zeige, dass T eine eindeutige stark stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ auf $\overline{\Sigma_\theta}$ besitzt. Zeige weiter, dass durch $S_\pm(t) \coloneqq \tilde{T}(e^{\pm i\theta}t)$ für $t \geq 0$ C_0-Halbgruppen mit Generatoren $A_\pm$ gegeben sind, wobei $A_\pm = e^{\pm i\theta}A$. (4*)

2. (i) Wir betrachten den Banachraum $X = \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ und definieren den Operator $(A, D(A))$ auf X durch (4)

$$D(A) \coloneqq \{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})\colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}, \quad Af \coloneqq f' \text{ für alle } f \in D(A).$$

Zeige, dass $(A, D(A))$ **keine** holomorphe Kontraktionshalbgruppe auf X erzeugt.
(Hinweis: Zeige, dass $i\lambda \in \sigma(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Finde hierfür Funktionen $f_n \in D(A)$ mit $\|f_n\| = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}(i\lambda - A)f_n = 0$.)
Bemerkung: Die Shifthalbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ ist somit keine holomorphe Kontraktionshalbgruppe.

(ii) Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und den Operator $(A, D(A))$ auf H mit (4)

$$D(A) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}) = \mathrm{W}^{2,2}(\mathbb{R}), \quad Af \coloneqq f'' \text{ für alle } f \in D(A).$$

Zeige, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe Kontraktionshalbgruppe auf H erzeugt.
Bemerkung: Die Gaußhalbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist also eine holomorphe Kontraktionshalbgruppe.

3. Es sei V ein komplexer Hilbertraum. Eine Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig*, falls es ein $M \geq 0$ gibt mit

$$|a(x,y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

für alle $x, y \in V$.
Zu einer stetigen Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir

$$A_a\colon V \longrightarrow V, \quad x \mapsto A_a x$$

wobei zu $A_a x \in V$ das (eindeutig bestimmte) Element in V zu $x \in V$ ist, welches $(A_a x|z) = a(x,z)$ für alle $z \in V$ erfüllt.
Für einen linearen beschränkten Operator $A \in \mathscr{L}(V)$ definieren wir $a_A(x,y) \coloneqq (Ax|y)$ für alle $x, y \in V$.

(i) Zeige, dass stets $A_a \in \mathscr{L}(V)$ gilt und dass a_A stets sesquilinear und stetig ist. Zeige weiter, dass stets $A_{a_A} = A$ und $a_{A_a} = a$ gilt und dass a genau dann sektoriell ist, wenn A_a sektoriell ist. (Zur Erinnerung: a heißt *sektoriell*, wenn es ein $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ gibt, so, dass $a(x) \coloneqq a(x,x) \in \overline{\Sigma_\theta}$ für alle $x \in V$ gilt.) (2)

(ii) Zeige, dass es stets ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so, dass $A_a - \omega$ sektoriell ist. (2)

4. Sei wiederum V ein komplexer Hilbertraum. Eine Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *koerziv*, falls es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\operatorname{Re} a(x) \geq \alpha\|x\|^2$ für alle $x \in V$. Es sei a eine koerzive und stetige Sesquilinearform auf V.

(i) Zeige, dass a sektoriell ist. (2)

(ii) Definiere $\|x\|_1 := \sqrt{\operatorname{Re} a(x)}$ für $x \in V$. Zeige, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V ist und dass diese äquivalent zur gegebenen Norm $\|\cdot\|_V$ auf V ist. (1)

(iii) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass V ein Teilraum eines Hilbertraums H (mit anderer Norm) ist und dass es ein $M \geq 0$ mit $\|x\|_H \leq M \cdot \|x\|_V$ für alle $x \in V$ gibt. Man zeige, dass die von a induzierte Norm $\|\cdot\|_a$ auf V definiert durch (1)

$$\|x\|_a := (\operatorname{Re} a(x) + \|x\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

für $x \in V$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist.
Anmerkung: Insbesondere zeigt dies, dass die Form a abgeschlossen ist, d.h. V ist bezüglich $\|\cdot\|_a$ vollständig.