UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 07.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13 + 19*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 11

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei X ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Unterraum von X. Wir betrachten den Quotientenraum X/Y und definieren (4*)

$$\|[x]\| \coloneqq \operatorname{dist}(x,Y) = \inf_{y\in Y} \|x+y\|$$

für $[x] \in X/Y$. Zeige, dass $\|\cdot\|$ eine (wohldefinierte) Norm auf dem Quotientenraum X/Y ist bezüglich welcher X/Y vollständig ist. Zeige weiter, dass die kanonische Projektion $q\colon X \longrightarrow X/Y$ ein beschränkter Operator mit $\|q\| \leq 1$ ist.
(Hinweis: Es sei daran erinnert, dass ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert.)

2. Es sei T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X.

(i) Zeige, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} \subseteq \sigma_{ap}(T(t))$ für alle $t \geq 0$. (2)
(Hinweis: Sei $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. Nutze die Allerweltsformel für die reskalierte Halbgruppe $\tilde{T}$ mit $\tilde{T}(t) \coloneqq e^{-\lambda t}T(t)$ für $t \geq 0$.)

Es sei nun T normstetig ab $\tau \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} = \sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\}$ für alle $t \geq 0$. Wir betrachten als Hilfsmittel den Raum

$$\ell^\infty(X) \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkte Folge in } X\}$$

mit der durch $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(X)$ definierten Norm. Dann ist $\ell^\infty(X)$ ein Banachraum und

$$c_0(X) \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge in } X\}$$

ein abgeschlossener Unterraum. Wir erhalten damit (nach Aufgabe 1) einen Banachraum $Z \coloneqq \ell^\infty(X)/c_0(X)$ und die stetige Quotientenabbildung $q\colon \ell^\infty(X) \longrightarrow Z$.

(ii) Sei $\lambda \in \sigma_{ap}(T(1)) \setminus \{0\}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein zugehöriger approximativer Eigenvektor. Wir betrachten die Funktion (2)

$$u\colon [0,1] \longrightarrow \ell^\infty(X), \quad t \mapsto (T(t+\tau)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Zeige, dass u stetig ist.

(iii) Zeige, dass $q \circ u \neq 0$. (3)
(Hinweis: Zeige, dass für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \in [\tau, \tau+1)$ gilt, dass $q(u(m-\tau)) = q(\lambda^m (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.)

(iv) Wende Satz die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten (Satz 21.10 aus der Vorlesung) an, um zu zeigen, dass $k \in \mathbb{Z}$ exisitiert, so, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (2)

$$y_n \coloneqq \int_0^1 e^{-2\pi i k t} T(t+\tau)x_n \,\mathrm{d}t \in D(A) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

keine Nullfolge in X ist.

(v) Zeige, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} = \sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\}$ für alle $t \geq 0$. (3*)
(Hinweis: Es genügt den Fall $t = \lambda = 1$ zu betrachten (warum?). Man baue nun aus der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der letzten Teilaufgabe einen approximativen Eigenvektor.)

(vi) Zeige nun, dass T den spektralen Abbildungssatz erfüllt. (1)

3. Es sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}; X)$ und (3)

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

die zugehörige inhomogene Differenzialgeichung. Es seien $u\colon [a,b] \longrightarrow X$ und $v\colon [b,c] \longrightarrow X$ milde Lösungen auf $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ mit $u(b) = v(b)$. Zeige, dass dann

$$w\colon [a,c] \longrightarrow X, \quad t \longrightarrow \begin{cases} u(t) & \text{falls } t \in [a,b], \\ v(t) & \text{falls } t \in (b,c] \end{cases}$$

eine milde Lösung auf $[a,c]$ ist.

4. Es sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X. Es sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) A erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X.

(b) Für jedes $x \in X$ und jedes $\tau > 0$ gibt es genau eine milde Lösung $u_x \in \mathrm{C}([0,\tau]; X)$ von

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \text{ für alle } t \in [0,\tau], \\ u(0) &= x. \end{aligned}$$

($*$) Gilt (a), so ist die Lösung in (b) jeweils gegeben durch $u_x(t) = T(t)x$ für $t \in [0,\tau]$, wobei T die von A erzeugte C_0-Halbgruppe ist.
Dies wollen wir hier zeigen.

(i) Zeige, dass aus (a) die Aussagen (*) und (b) folgen. (1*)
(Hinweis: Dies ist im Wesentlichen ein Spezialfall eines Satzes aus der Vorlesung.)

(ii) Wir nehmen nun an, dass (b) gilt, und setzen $T(t)x := u_x(t)$ für $x \in X$ und $t \geq 0$. Zeige, dass T eine C_0-Halbgruppe ist. (4*)
(Hinweis: Betrachte für $\tau > 0$ die Abbildung

$$\Phi_\tau\colon X \longrightarrow C([0,\tau]; X), \quad x \mapsto u_x|_{[0,\tau]}.$$

Zeige, dass jedes Φ_τ linear und abgeschlossen und somit stetig ist. Folgere dann damit, dass $T(t) \in \mathscr{L}(X)$ für alle $t \geq 0$.)

(iii) Zeige, dass A der Generator der C_0-Halbgruppe T aus (ii) ist. (7*)
(Hinweis: Es sei B der Generator von T und $\lambda > \max(0, \omega(B))$. Zeige, dass $R(\lambda, B)X \subseteq D(A)$ und $(\lambda - A)R(\lambda, B)x = x$ für alle $x \in X$. Nutze hierfür die Integraldarstellung von $R(\lambda, B)$ und partielle Integration. Zeige anschließend, dass $\lambda - A$ injektiv ist und folgere die Behauptung.)