Universität Ulm
Abgabe:
28.06.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

25 $+3^*$ Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 10

Tutoriumsaufgaben

82. Berechne für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x, y) = (y, y - x)$ die Wegintegrale

$$\int_{\gamma_i} v$$

für die Wege γ_i, $i = 1, 2, 3$, wobei γ_1 der Streckenzug $[(0, 0), (0, 1), (1, 1)]$, γ_2 der Streckenzug $[(0, 0), (1, 0), (1, 1)]$ und γ_3 der Parabelbogen (t, t^2) für $0 \leq t \leq 1$ ist.

83. Überprüfe, ob folgende Vektorfelder Gradientenfelder sind und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion.

(a) $f(x, y) = (12xy + 3, 6x^2)$ (b) $f(x, y) = (y, y - x)$

(c) $f(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$ (d) $f(x, y) = (xy, y)$

Hausaufgaben

84. Bestimme, falls existent, Maximum und Minimum [12]

(a) der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y, z) = x^2 + y + z$ auf der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\,.$$

(b) der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x + y - z = 0\}\,.$$

85. Gegeben seien die Mengen [10]

$$\mathscr{G} := \{(x, y) \,:\, 2x + y = 9\} \quad \text{und} \quad \mathscr{E} := \{(x, y) \,:\, 4x^2 + y^2 = 8\}\,.$$

Finde diejenigen Punkte $P \in \mathscr{G}$ und $Q \in \mathscr{E}$ mit minimalem Abstand voneinander.

Hinweis: Es ist einfacher (aber äquivalent) das Quadrat des Abstandes zu minimieren. “Abstand” bedeutet in dieser Aufgabe “euklidischer Abstand”.

86. (Kabel für die Golden Gate Bridge) [3]

Die Golden Gate Bridge ist eine der größten Hängebrücken der Welt. Die beiden Pylone haben einen Abstand von 1280 Metern voneinander und eine Höhe von 152 Metern über der Fahrbahn. Es folgt aus physikalischen Überlegungen, dass die Form des Kabels, an dem die Brücke hängt, eine Mischung aus einer Parabel und einer sogenannten Kettenlinie ist.

Golden Gate im Nebel (Abb. ähnlich)

In dieser Aufgabe wollen wir den zweiten Teil vernachlässigen und annehmen, dass das Kabel Parabelförmig ist, wobei sich der Scheitel 2 Meter über der Fahrbahn befindet.

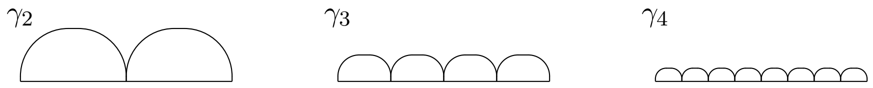
Berechne die Länge des Kabels.

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\sqrt{1+x^2}$ ist gegeben durch $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}))$.

87. In ihrem Artikel *Several elemantary proofs that 0=1* (Nieuw Archief voor Wiskunde, 4e Serie, Deel 8 (1990), 253-256) beweisen J.A.P. Heesterbeek, J.M.A.M. van Neerven und H.A.J.M. Schellinx dass $\pi = 2$ ist. [3*]

Beweis: In der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir folgende Wege von $(0,0)$ nach $(0,2)$:

γ_0 ist die Gerade von $(0,0)$ nach $(0,2)$. γ_1 ist der obere Halbkreis von $(0,0)$ nach $(0,2)$. Für $k \geq 2$ besteht der Weg γ_k aus 2^{k-1} solcher Halbkreisen vom Radius 2^{1-k} aneinandergesetzt, vergleiche folgende Skizze:



Dann hat der Weg γ_0 die Länge 2 und der Weg γ_k für jedes $k \geq 1$ die Länge π. Weil aber die γ_k gleichmässig gegen γ_0 konvergieren muss $2 = \pi$ sein. □

Nun ist aber folgendes aus der Bibel bekannt:

> *Und er machte ein Meer, gegossen von einem Rand zum andern zehn Ellen weit, rundumher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß ringsum.*
>
> (1. Könige 7:23)

Demnach ist also $\pi = 3$. Somit müsste mit obigem Resultat $2 = 3$ folgen, was absurd ist.

Eine weitere mögliche Referenz ist J.H. Lambert (*Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques* Histoire de l'Académie (Berlin) XVII: 265–322. 1768.), der zeigt, dass π irrational, also insbesondere nicht 2, ist.

Also kann mit obigem Beweis etwas nicht stimmen. Wo aber steckt der Fehler?