Universität Ulm
Abgabe:
26.04.11, vor der Vorlesung

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

22+5* Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 1

Tutoriumsaufgaben

Beweise oder widerlege:

8. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so ist $f : M \to M$ stetig, genau dann, wenn für alle kompakten $K \subset M$ auch $f(K)$ kompakt ist.

9. Es seien $(E, \| \cdot \|_E)$ und $(F, \| \cdot \|_F)$ normierte Räume. Dann ist eine lineare Funktion $T : E \to F$ genau dann stetig, wenn sie stetig an der Stelle 0 ist.

10. Es sei d eine Metrik auf $\mathbb{R}^m$. Ist K eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $(\mathbb{R}^m, d)$, so ist K kompakt.

11. Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \to M_2$ stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M_1, d_1), so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M_2, d_2).

12. Sind $K_1, \ldots, K_n$ kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes (M, d), so ist $\bigcup_{j=1}^n K_j$ kompakt.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind *einzeln* und *handschriftlich* jeweils am folgenden *Dienstag vor der Vorlesung* (für dieses Blatt also am 26. April) abzugeben. Die Hausaufgaben werden am Mittwoch nach der Abgabe (für dieses Blatt also am 27. April) in den Übungsgruppen besprochen.
Die Blätter bitte (gut leserlich!) mit *Eurem Namen*, dem *Namen des Übungsgruppenleiters* und der *Nummer der Übungsgruppe* (Dominik Dier: 1,5; Stephan Fackler: 2,6; Alexander Pickert: 3,7; Markus Kunze: 4,8) versehen. Mehrere Blätter bitte zusammentackern.

13. (Zugfahren in Frankreich) [6]

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir

$$d_{\text{SNCF}}(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{, falls } x, y \text{ linear abhängig sind} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Zeige, dass d_{SNCF} eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Wird d_{SNCF} durch eine Norm induziert?

14. (Matrixnormen)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^m}$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

1. Zeige, dass durch [3]

$$\|A\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} := \sup\{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} : \|x\|_{\mathbb{R}^m} \le 1\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ definiert wird.

2. Zeige, dass $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \max\{|a_{ij}| \,:\, 1 \le i \le n\,,\, 1 \le j \le m\}$ falls $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} = \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m} = \|\cdot\|_1$. [3]

15. In den Teilaufgaben (a) – (d) ist jeweils ein metrischer Raum (M, d) und eine Teilmenge A von M gegeben. Entscheide jeweils, ob A abgeschlossen in (M, d) ist und ob A offen in (M, d) ist. [8]

(a) $M = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \|x - y\|_2$ und $A = \{(t, 2t) \,:\, t \in (0, 1)\}$.

(b) $M = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = d_{\mathit{SNCF}}(x, y)$ und $A = \{(t, 2t) \,:\, t \in (0, 1)\}$.

(c) $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ und $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 \le x^2 \le 3\}$.

(d) $M = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$ und $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 \le x^2 \le 3\}$.

16. 1. Finde im normierten Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$, sodass möglichst viele der Mengen [4]

$$B \quad \overline{B} \quad \overset{\circ}{B} \quad \overset{\circ}{\overline{B}} \quad \overline{\overset{\circ}{B}} \quad \overline{\overset{\circ}{\overline{B}}} \quad \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}}$$

verschieden sind.

2. Zeige, dass auch durch weiteres Abschliessen und Übergang zum Inneren aus einer Menge B nicht mehr als die 7 oben genannten Mengen erzeugt werden können. [3]

Hinweis: Im ersten Teil der Aufgabe genügt es, die Mengen $B, \overline{B}, \overset{\circ}{B}, \ldots$ anzugeben. Es muss nicht bewiesen werden, dass die zweite Menge der Abschluss der ersten, die dritte das Innere der ersten, ... ist.
Für den zweiten Teil der Aufgabe genügt es zu zeigen, dass

$$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}} = \overset{\circ}{\overline{B}} \quad \text{und} \quad \overline{\overset{\circ}{\overline{B}}} = \overline{\overset{\circ}{B}}$$

für jede Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ gilt.