Universität Ulm
Abgabe:
10.05.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

25 Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 3

Tutoriumsaufgaben

26. Berechne:

$$\int_0^1 \int_0^2 xye^{x^2y}\,dy\,dx\,.$$

Beweise oder widerlege:

27. Es gibt keine stetige, surjektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $(0,1) \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$.

28. Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) := \int_0^1 f(tx)\,dx$ stetig.

29. Ist A eine zusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes, so ist auch $\mathring{A}$ zusammenhängend.

30. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(t) = 2\sqrt{|t|}$ ist Lipschitzstetig.

Hausaufgaben

31. Wir definieren $d_1, d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ durch [7]

$$d_1(x,y) := |x-y| \quad \text{und} \quad d_2(x,y) := |\arctan x - \arctan y|\,.$$

(a) Zeige, dass d_2 eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Zeige, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann offen in $(\mathbb{R}, d_2)$ ist, wenn A offen in $(\mathbb{R}, d_1)$ ist.

(c) Zeige, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

32. Wir betrachten den normierten Raum $(\mathbb{R}^{d\times d}, \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm ist. Weiter sei $f(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. [4]

Zeige: Ist $\|A\| < r$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k A^k$.

33. (Heron-Verfahren) [7]

Es sei $z \in [1,2]$ und $\alpha \in (1,\infty)$. Weiter sei

$$\varphi_{z,\alpha}(t) := \frac{\alpha-1}{\alpha}t + \frac{z}{\alpha}t^{1-\alpha}\,.$$

1. Zeige, dass $\varphi_{z,\alpha}$ eine strikt kontraktive Abbildung von $[1,2]$ in sich definiert und somit einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Zeige, dass dieser Fixpunkt $z^{\frac{1}{\alpha}}$ ist.

2. Wie viele Schritte in der Fixpunktiteration werden (bei beliebigem Startwert in $[1, 2]$) benötigt um $2^{\frac{6}{7}}$ auf 4 Nachkommastellen genau zu berechnen?

34. Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\varphi_n : M \to M$ eine Folge von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften: [7]

(i) Es gibt $c \in (0, 1)$ mit $d(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) \leq cd(x, y)$ für alle $x, y \in M$ und $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für alle $x \in M$ existiert $\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.

(a) Zeige, dass $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$ für alle $x, y \in M$ ist.

(b) Es sei z_n der eindeutige Fixpunkt von φ_n und z der eindeutige Fixpunkt von φ. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ist.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L \in (0, 1)$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\Phi(x) \in C([0, 1])$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)) \; t \in [0,1] \\ u(0) &= x\,. \end{cases}$$

Zeige, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to C([0, 1])$ stetig ist.