Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

13+13* Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 4

Tutoriumsaufgaben

34. Untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit in $(0,0)$ und bestimme gegebenenfalls die Ableitung/die partiellen Ableitungen in $(0,0)$. Untersuche auch, ob f in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar ist.

(a) $$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0\,. \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0\,. \end{cases}$$

(c) $$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0\,. \end{cases}$$

Beweise oder Widerlege:

35. Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.

36. Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x_0 \in U$ und $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine bijektive, lineare Abbildung (Basiswechsel!). Dann ist $f \circ \Phi$ partiell differenzierbar in $y_0 := \Phi^{-1}(x_0)$.

Hausaufgaben

37. Zeige, dass das Anfangswertproblem [8]

$$\begin{cases} u'(t) &= u(t) - 1 \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung hat. Berechne die Lösung mittels der Fixpunktiteration.

38. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch [5]

$$f(x,y) := \frac{y^3\big[\sin(xy)\big]^2}{x^2+y^2}$$

surjektiv ist.

39. Zeige, dass [8]

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \frac{1}{2}$$

ist. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

Hinweis: Bei der Berechnung des ersten iterierten Integrals, klammere im Zähler x und im Nenner x^3 aus. Die Substitution $t = \frac{y}{x}$ liefert einen rationalen Integranden, dessen Integral mittels Partialbruchzerlegung bestimmt werden kann. Bei der Berechnung des zweiten iterierten Integrals verfahre ähnlich.

[5]

40. Gegeben sei die Menge

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \le x \le 2 - y^2\} \setminus \{(e^{-n}, \frac{n}{n+1}) \,:\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Bestimme das Innere von A, den Abschluss von A und den Rand von A. Entscheide weiter, ob A kompakt ist und ob A zusammenhängend ist.

Hinweis: Bei *dieser Aufgabe* müssen keine Begründungen gegeben werden.