Universität Ulm

Abgabe:
24.05.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

25 Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 5

Tutoriumsaufgaben

41. Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Berechne, für festes $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + tv)\,.$$

Hinweis: "Berechne" bedeutet in dieser Aufgabe "drücke durch v und partielle Ableitungen von f aus".

42. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Zeige, dass $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$ existieren, aber verschieden sind.
Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Schwarz?

Beweise oder Widerlege:

43. Es gibt eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\nabla f(x,y) = (xy, 2x)$.

44. Für alle $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ gilt für die Funktion u, definiert durch $u(t,x) := f(x-t) + g(x+t)$, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2\,.$$

45. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Sind $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$D_u f(x_0) = D_v f(x_0) = 0$$

so sind u und v linear abhängig.

Hausaufgaben

46. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch [5]

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0,0)$ in jede Richtung $v \neq 0$ differenzierbar ist und entscheide, ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

47. Es sei $\|\cdot\|$ eine (beliebige) Norm auf $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass [5]

(a) $\|\cdot\|$ nicht differenzierbar in $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ ist.

(b) für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion $x \mapsto \|x\|^{1+\varepsilon}$ differenzierbar in $\mathbf{0}$ ist.

48. Bestimme für folgende Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, die auf einer (geeigneten) offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ definiert sind, ∇f, wo definiert. [10]

(a) $f(x, y) := 2x^2 - yx^3 + xy^2$

(b) $f(x, y, z) := \log \frac{x-y}{z}$

(c) $f(x, y) := \int_y^x \varphi(t)\, dt$,
wobei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist

(d) $f(x, y) := xe^{\cos(\frac{x}{y})}$

49. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grade* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in (0, \infty)$ gilt. [5]

Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\alpha f(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} x_k$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist.

Hinweis Es sei $\varphi(t) := f(tx)$. Berechne $\varphi'(1)$ auf zwei Arten.