Universität Ulm
Abgabe:
31.05.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

25 Punkte

Übungen zu Analysis 2 — Blatt 6

Tutoriumsaufgaben

50. Bestimme und klassifiziere die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Im folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^2(U)$. Beweise oder Widerlege:

51. Ist x_0 eine lokale Maximumstelle von f, so ist $H_f(x_0)$ negativ definit.

52. Ist K kompakt, $K \subset U$ und $x_0 \in K$ derart, dass $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in K\}$, so ist $f'(x_0) = \mathbf{0}$.

53. Ist x_0 keine Extremstelle von f, so ist $H_f(x_0)$ indefinit.

54. Ist 0 für alle $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine lokale Minimumstelle von $\varphi_v : t \mapsto f(x_0 + tv)$ mit $\varphi_v''(0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimumstelle von f.

Hausaufgaben

55. (Wärmeleitungsgleichung) [4]

Es sei $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := t^{-\frac{d}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{4t} \sum_{j=1}^{d} x_j^2 \Big) .$$

Zeige, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst, d.h. zeige, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta_x u(t,x) \quad \text{für alle } t > 0 \, , \, x \in \mathbb{R}^d \, .$$

56. (Wellengleichung) [4]

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, $w \in \mathbb{R}^d$ und definiere die Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $u(t,x) = f(w \cdot x - |w| t)$, wobei $|w|$ die euklidische Norm von w und $w \cdot x$ das euklidische Skalarprodukt von w und x ist. Zeige, dass u die Wellengleichung löst, d.h. zeige, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta_x u(t,x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \, , \, x \in \mathbb{R}^d \, .$$

57. (Methode des steilsten Abstiegs, engl.: Method of steepest descend) [9]

Es sei f stetig differenzierbar. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f'(x) = \nabla f(x)$ in die Richtung des steilsten Anstiegs von f an der Stelle x zeigt. Dementsprechend zeigt

$-\nabla f(x)$ in die Richtung des steilsten Abstiegs. Ist nun eine Minimumstelle von f gesucht, so erscheint folgender Algorithmus plausibel:

Ausgehend von einem Startwert x_0, gehe ein Stück (dessen Länge noch zu bestimmen ist) in die Richtung des steilsten Abstiegs. Man kommt an eine Stelle x_1, von der aus man wieder ein Stück in die Richtung des steilsten Abstiegs geht. Dies wird nun iteriert, d.h. man definiert induktiv $x_{n+1} := x_n - \sigma_n f'(x_n)$, wobei σ_n die sog. *Schrittweite* ist.

Auf diese Art und Weise sollte man sich immer mehr einer Minimumstelle nähren.

In dieser Aufgabe geben wir ein Beispiel, dass dies Verfahren tatsächlich zum Ziel führen kann.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$. Wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen.

(a) Es sei $f(x) := \frac{1}{2}(A^{-1}(Ax-b), Ax-b) = \frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x) + \frac{1}{2}(Ab,b)$. Zeige, dass $Ax^* = b$ genau dann, wenn $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Nun wenden wir obiges Verfahren an. Es ist $f'(x) = Ax - b$. Gegeben einen Startwert x_0, definieren wir induktiv

$$x_{n+1} := x_n - \sigma_n f'(x_n) = x_n - \sigma_n(Ax_n - b)\,.$$

Wir setzen abkürzend $d_n := b - Ax_n$ (sodass $x_{n+1} = x_n + \sigma_n d_n$) und wählen (aus Gründen die wir hier nicht weiter erläutern) $\sigma_n := \frac{\|d_n\|^2}{(Ad_n,d_n)}$ falls $d_n \neq 0$ und $\sigma_n := 0$ sonst.

(b) Zeige, dass $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ und dass dies eine strikte Ungleichung ist, außer wenn $d_n = 0$ (d.h. $Ax_n = b$, also x_n schon unsere gesuchte Minimumstelle ist).

(c) Schlussfolgere aus (b), dass die Folge (x_n) beschränkt ist.

Hinweis: Zeige zunächst: Ist λ_0 der kleinste Eigenwert von A, so ist $f(x) \geq \lambda_0\|x\|^2 - \|b\|\cdot\|x\| + \frac{1}{2}(Ab,b)$.

(d) Zeige, dass x_n gegen die Minimumstelle von f (also die Lösung von $Ax = b!$) konvergiert.

Hinweis: Kompaktheit und Haarspalter-Lemma!

58. Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^y (:= e^{y\log x})$. [8]

(a) Bestimme alle partiellen Ableitungen von f bis zur dritten Ordnung.

(b) Berechne nährungsweise $1{,}05^{1{,}02}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-4}.

Hinweis: Taylorentwicklung!