Universität Ulm

Abgabe:
21.06.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

20+5* Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 9

Tutoriumsaufgaben

74. Bestimme mittels der Lagrangeschen Multiplikatorregel Maximum und Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y) = yx^2$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 1$.

75. Bestimme, soweit existent, Maximum und Minimum der Funkton $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y, z) = xy^2z^3$ auf der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in [0,\infty)^3 \,:\, 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 \leq 6\}$$

76. Betrachte die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.

Bestimme die Punkte mit Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen und finde alle Punkte, in denen sich die Kurve selbst schneidet und die zugehörigen Schnittwinkel.

77. Berechne die Länge der *Zykloide* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$.

Hausaufgaben

78. Zeige, dass das Gleichungssystem [6]

$$\begin{aligned} u + \cos(uv) &= vx + 1 \\ \sin u &= y + v \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x, y, u, v) := (0, -1, 0, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $(u, v) = g(x, y)$ aufgelöst werden kann und bestimme die Ableitung von g in $(0, -1)$.

79. Es sei $A : (-1, 1) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig differenzierbar mit $A(0) = I$. Zeige, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $B : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt mit $B(0) = I$ und $B^2(t) = A(t)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. [6]

Hinweis: Wende den Satz über implizite Funktionen auf die Funktion $f : (-1, 1) \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, gegeben durch $f(t, S) = A(t) - S^2$, an

80. Zeige, dass die Gleichung [8]

$$xy + (1 + y)z = -z^3$$

in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ nach $z = g(x, y)$ aufgelöst werden kann. Zeige weiter, dass g in einer Umgebung von $(0, 0)$ zweimal stetig differenzierbar ist und bestimme das Taylorpolynom vom Grad 2 um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

81. Gib ein Beispiel einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, sodass $(0, 0)$ ein kritischer Punkt von f ist, $D_x^2 f(0, 0) > 0$ und $D_y^2 f(0, 0) > 0$ aber $(0, 0)$ keine lokale Minimumstelle von f ist. [5]