Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

Probeklausur zur Analysis 2

Bearbeitungszeit: 120 min
Zugelassene Hilfsmittel: keine
Es gibt insgesamt 100 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig.

1. Es sei $S \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch [5]

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(t, n^{-1}t) \,:\, t \in [0,1]\}\,.$$

Bestimme $\overset{\circ}{S}, \bar{S}$ und ∂S. Entscheide ferner, ob S kompakt ist und ob S zusammenhängend ist. In *dieser Aufgabe* müssen Aussagen nicht begründet werden.

2. (a) Definiere den Begriff der Richtungsableitung. [5]

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch [8]

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0,0)$ in jede Richtung v differenzierbar ist und untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $(0,0)$.

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$. Bestimme und klassifiziere die kritischen Punkte von f. [10]

4. (a) Formuliere den Satz über implizite Funktionen. [8]

(b) Für $a = (a_2, a_1, a_0)$ sei [10]

$$p_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Zeige, dass p_a für a nahe genug bei $\bar{a} = (-2, -5, 6)$ eine eindeutige Nullstelle $\lambda(a)$ in der Nähe von $x = 1$ besitzt. Zeige ferner, dass λ stetig differenzierbar ist und bestimme das Taylor Polynom ersten Grades von λ am Entwicklungspunkt $\bar{a}$.

5. (a) Definiere den Begriff "kompakte Menge". [5]

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 2x + y^2$ und [12]

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 = 1\}\,.$$

Begründe, warum $\max_M f$ und $\min_M f$ existieren und bestimme diese.

6. (a) Formuliere den Satz von Poincaré. [7]

(b) Der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, sei gegeben durch $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Berechne die Länge von γ. [7]

(c) Entscheide, ob $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x, y) = (3x^2y^2, 2x^3y + 1)$, ein Gradientenfeld ist und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion von v. [8]

(d) Berechne $\int_\gamma v$ mit γ aus (b) und v aus (c). [5]

7. Kreuze auf dem Beiblatt zu dieser Aufgabe an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Diese Aufgabe wird wie folgt bewertet: Für ein richtig gesetztes Kreuz gibt es $+1$ Punkt, für ein falsch gesetztes Kreuz gibt es -1 Punkt. Wird kein Kreuz gesetzt, so gibt es 0 Punkte. Bei negativem Punktesaldo wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. [10]

1. Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen in $\mathbb{R}^d$ ist kompakt.
2. Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ strikt konvex, so besitzt f ein globales Minimum.
3. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f \in C^1(U)$ derart, dass $f(U)$ abgeschlossen ist, so besitzt f einen kritischen Punkt.
4. Sind $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig, so ist auch $f + g$ Lipschitz stetig.
5. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist die Jacobi Matrix von f symmetrisch.
6. Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt partiell differenzierbar, so ist f stetig.
7. Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ derart, dass $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $H_f(\mathbf{0})$ indefinit ist, so gibt es $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, sodass $\varphi_1 : t \mapsto f(tv_1)$ ein lokales Minimum in 0 und $\varphi_2 : t \mapsto f(tv_2)$ ein lokales Maximum in 0 besitzt.
8. Die Ableitung von $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, gegeben durch $f(X) = X^3$, ist $f'(X) = 3X^2$.
9. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ injektiv, so ist $f'(x)$ für alle $x \in \Omega$ invertierbar.
10. Der Durchschnitt zweier zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend.

Hinweis: Wer noch Punkte für die Vorleistungen benötigt, kann am 12. Juli vor der Vorlesung noch bis zu drei Aufgaben aus der Probeklausur abgeben, die erzielten Punkte zählen als Zusatzpunkte. Nicht bewertet werden die Aufgabenteile 2(a), 4(a), 5(a) und 6(a). Wer die 125 Punkte für die Vorleistungen schon erreicht hat, bitte nichts mehr abgeben.
Besprechung: Am 15. Juli in der Vorlesung.