Universität Ulm
Abgabe: Freitag, 22.05.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 3

7. *Mittelwerteigenschaften:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $r > 0$ und $B := B((x_0, y_0), r) \subset \Omega$. Zeige:

(a) $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))\, \mathrm{d}t$ für alle $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$. (2)
Tipp: Poisson-Integralformel

(b) $u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$ für alle $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. (2)
Tipp: Substitution mit Polarkoordinaten

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\Omega^* := \Omega \setminus \{x_0\}$. Wir wollen zeigen, dass die Mengen $\mathcal{H}(\Omega^*) \cap \mathrm{C}(\Omega)$ und $\mathcal{H}(\Omega)$ übereinstimmen. Sei dazu $B := B(x_0, R)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^N$ und $B^* := B \setminus \{x_0\}$.

(a) Bestimme alle Funktionen $f \in \mathrm{C}^2(0, R)$ mit $rf''(r) + f'(r) = 0$ für $r \in (0, R)$! (2)

(b) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ und $u|_{\partial B} = 0$. Zeige, dass u invariant unter Rotationen um x_0 ist: Es gilt $u(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_2)$ für alle y_1 und y_2 aus $\mathbb{R}^2$ mit $|y_1| = |y_2| \le R$. (2)
Tipp: Verwende die Eindeutigkeit von Lösungen des Dirichletproblems.

(c) Ist $w \in \mathrm{C}^2(B^*)$ invariant unter Rotationen um x_0, so gibt es eine Funktion $\widetilde{w}$ in $\mathrm{C}^2(0, R)$ mit $\widetilde{w}(|x - x_0|) = w(x)$ für $x \in B^*$. Für diese gilt

$$\Delta w(x) = \widetilde{w}''(r) + \tfrac{1}{r}\widetilde{w}'(r)$$

mit $r := r(x) := |x - x_0|$. (2)

(d) Seien u und v in $\mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ mit $u|_{\partial B} = v|_{\partial B}$. Zeige, dass $u = v$ gilt! (2)
Tipp: Unter Verwendung der vorigen Aufgabenteile kann man zeigen, dass $w := u - v$ auf B identisch verschwindet.

(e) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$. Zeige, dass u dann in $\mathcal{H}(B)$ ist! (2)

(f) Sei u in $\mathcal{H}(\Omega^*)$. Zeige, dass es genau dann eine Fortsetzung $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ von u auf Ω gibt, wenn der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} u(x)$ existiert. (2)

(g) Stimmt die Aussage des vorigen Aufgabenteils auch für $N = 1$? Anders formuliert: Ist jede Funktion in $\mathcal{H}((-1, 0) \cup (0, 1)) \cap \mathrm{C}[-1, 1]$ in $\mathcal{H}(-1, 1)$? (2)

9. Sei $B := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $B^* := B \setminus \{(0, 0)\}$ und $g \in \mathrm{C}(\partial B^*)$. Es gebe eine Lösung u in $\mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$, die das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } B^*, \\ u|_{\partial B^*} = g \end{cases}$$

löst. Zeige, dass dann

$$g(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t))\, \mathrm{d}t$$

gilt! (2)