Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 22.05.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 3

7. *Mittelwerteigenschaften:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $r > 0$ und $B := B((x_0, y_0), r) \subset \Omega$. Zeige:

(a) $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))\,\mathrm{d}t$ für alle $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$. (2)
Tipp: Poisson-Integralformel

Lösung: Definiere $v(x, y) := u(x_0 + rx, y_0 + ry)$. Mit der Kettenregel sieht man leicht, dass v in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ liegt. Nach Voraussetzung ist v in $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Interpretiert man v als die eindeutige Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{auf } \mathbb{D}, \\ v|_{\partial\mathbb{D}} = f \end{cases}$$

mit $f := v|_{\partial\mathbb{D}}$, so folgt aus Aufgabe 5

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = v(0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

also gerade die Behauptung.

(b) $u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ für alle $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. (2)
Tipp: Substitution mit Polarkoordinaten

Lösung: Rechnet man die rechte Seite mittels Substitution mit Polarkoordinaten aus, ergibt sich durch Anwendung des ersten Aufgabenteils auf Kugeln von kleinerem Radius

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(x_0 + s\cos(\varphi), y_0 + s\sin(\varphi))s\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^r u(x_0, y_0)s\,\mathrm{d}s = u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung.

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\Omega^* := \Omega \setminus \{x_0\}$. Wir wollen zeigen, dass die Mengen $\mathcal{H}(\Omega^*) \cap \mathrm{C}(\Omega)$ und $\mathcal{H}(\Omega)$ übereinstimmen. Sei dazu $B := B(x_0, R)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^N$ und $B^* := B \setminus \{x_0\}$.

(a) Bestimme alle Funktionen $f \in \mathrm{C}^2(0, R)$ mit $rf''(r) + f'(r) = 0$ für $r \in (0, R)$! (2)

Lösung: Die Ableitung $g = f'$ von f erfüllt die Gleichung $rg'(r) = -g(r)$. Mit der Lösungsformel für Gleichungen in getrennten Veränderlichen erhält man, dass $g(r) = cr^{-1}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt. Integriert man diese Gleichung, ergibt sich $f(r) = c\log(r) + d$ für ein $d \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist jede Lösung der Differentialgleichung von dieser Form.

(b) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ und $u|_{\partial B} = 0$. Zeige, dass u invariant unter Rotationen um x_0 ist: Es gilt $u(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_2)$ für alle y_1 und y_2 aus $\mathbb{R}^2$ mit $|y_1| = |y_2| \le R$. (2)
Tipp: Verwende die Eindeutigkeit von Lösungen des Dirichletproblems.

Lösung: Seien y_1 und y_2 wie in der Aufgabenstellung. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $A = (a_{ij})$ mit $Ay_1 = y_2$. Sei $v(x) := u(x_0 + A(x - x_0))$. Dann ist $v(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_2)$. Offenbar gilt $v|_{\partial B^*} = u|_{\partial B^*}$. Nach der Kettenregel liegt v in $\mathrm{C}^2(B^*)$ mit

$$\nabla v(x) = \nabla u(x_0 + A(x - x_0))A.$$

Daher ist die Hessematrix H_v von v, also die Ableitung von $(\nabla v)^T$, durch

$$H_v(x) = A^T H_u(x_0 + A(x - x_0))A$$

gegeben. Nutzt man nun $A^T A = I$ und die Rechenregel $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für die Spur einer Matrix aus, so ergibt sich

$$\Delta v(x) = \mathrm{Spur}\, H_v(x) = \mathrm{Spur}\, H_u(x_0 + A(x - x_0)) = \Delta u(x_0 + A(x - x_0)) = 0.$$

Also ist v ebenso wie u eine Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{auf } B^*, \\ w|_{\partial B^*} = u|_{\partial B^*}, \end{cases}$$

woraus mit der Eindeutigkeit der Lösung $u = v$ folgt. Also gilt

$$u(x_0 + y_2) = u(x_0 + Ay_1) = v(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_1),$$

was die Behauptung zeigt.

(c) Ist $w \in \mathrm{C}^2(B^*)$ invariant unter Rotationen um x_0, so gibt es eine Funktion $\widetilde{w}$ in $\mathrm{C}^2(0, R)$ mit $\widetilde{w}(|x - x_0|) = w(x)$ für $x \in B^*$. Für diese gilt

$$\Delta w(x) = \widetilde{w}''(r) + \tfrac{1}{r}\widetilde{w}'(r)$$

mit $r := r(x) := |x - x_0|$. (2)

Lösung: Nach Definition der Rotationsinvarianz ist die Definition $\widetilde{w}(r) := w(x)$ für ein x mit $|x - x_0| = r$ eine eindeutige Zuordnungsvorschrift. Da insbesondere $\widetilde{w}(r) = w(x_0 + re_1)$ gilt, ist $\widetilde{w}$ nach der Kettenregel zweimal stetig differenzierbar. Wendet man die Kettenregel auf die Gleichung $\widetilde{w}(r) = w(x)$ mit $r = r(x)$ an und nutzt

$$D_i r(x) = \frac{x_i - x_{0;i}}{r(x)}$$

aus, so erhält man

$$\begin{aligned} D_i w(x) &= \widetilde{w}'(r)\frac{x_i - x_{0;i}}{r} \\ D_{ii} w(x) &= \widetilde{w}''(r)\frac{(x_i - x_{0;i})^2}{r^2} + \widetilde{w}'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_{0;i})^2}{r^3}\right) \end{aligned}$$

und damit durch Addition der Gleichungen

$$\Delta w(x) = \widetilde{w}''(r) + \widetilde{w}'(r)\tfrac{1}{r}$$

wie behauptet.

(d) Seien u und v in $\mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ mit $u|_{\partial B} = v|_{\partial B}$. Zeige, dass $u = v$ gilt! (2)

Tipp: Unter Verwendung der vorigen Aufgabenteile kann man zeigen, dass $w := u - v$ auf B identisch verschwindet.

Lösung: Sei $w := u - v$. Dann erfüllt w die Voraussetzungen von Aufgabenteil (b) und ist somit rotationsinvariant. Wähle $\widetilde{w}$ wie in Aufgabenteil (c). Dann erfüllt $\widetilde{w}$ nach Aufgabenteil (c) die Voraussetzungen von Aufgabenteil (a), woraus folgt, dass es ein c und d mit

$$\widetilde{w}(|x - x_0|) = c \log(|x - x_0|) + d$$

gibt. Da w stetig in x_0 ist, ist $\widetilde{w}$ bei 0 insbesondere beschränkt. Dies ist nur dann möglich, wenn $c = 0$ gilt. Zudem ist $\widetilde{w}(R) = 0$, da w auf ∂B verschwindet. Also muss $\widetilde{w} = 0$ gelten. Dies zeigt $w = 0$ und somit $u = v$.

(e) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$. Zeige, dass u dann in $\mathcal{H}(B)$ ist! (2)

Lösung: Laut Vorlesung (und Aufgabe 5) existiert eine Funktion $v \in \mathcal{H}(B)$ mit $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$. Nach Aufgabenteil (d) gilt also $u = v \in \mathcal{H}(B)$.

(f) Sei u in $\mathcal{H}(\Omega^*)$. Zeige, dass es genau dann eine Fortsetzung $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ von u auf Ω gibt, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} u(x)$ existiert. (2)

Lösung: Gibt es eine solche Fortsetzung v, so existiert

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$$

natürlich. Existiert umgekehrt dieser Grenzwert, so gibt es zumindest eine stetige Fortsetzung v von u, die mittels $v(x_0) := \lim_{x\to x_0} u(x)$ definiert werden kann. Weil Ω offen ist, gibt es $R > 0$ mit $B = B(x_0, R) \Subset \Omega$. Dann ist offenbar $v|_B \in \mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ und somit nach Aufgabenteil (e) $v|_B \in \mathcal{H}(B)$. Dies zeigt $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ und damit die Behauptung.

Bemerkung: Diese Aussage ist auch für $N \geq 2$ richtig. Den Beweis dafür kann man wie in dieser Aufgabe führen, sofern man weiß, dass das Dirichletproblem auf Kugeln wohlgestellt ist, dass es also zu jeder stetigen Funktion auf der Sphäre eine harmonische Funktion auf der Kugel mit diesen Randwerten gibt.

(g) Stimmt die Aussage des vorigen Aufgabenteils auch für $N = 1$? Anders formuliert: Ist jede Funktion in $\mathcal{H}((-1,0) \cup (0,1)) \cap \mathrm{C}[-1,1]$ in $\mathcal{H}(-1,1)$? (2)

Lösung: Nein. Ein Gegenbeispiel ist $u(x) = |x|$.

9. Sei $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $B^* := B \setminus \{(0,0)\}$ und $g \in \mathrm{C}(\partial B^*)$. Es gebe eine Lösung u in $\mathcal{H}(B^*) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$, die das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } B^*, \\ u|_{\partial B^*} = g \end{cases}$$

löst. Zeige, dass dann

$$g(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t))\, \mathrm{d}t$$

gilt! (2)

Lösung: Sei u die Lösung des Problems. Nach Aufgabenteil 8(e) ist $u \in \mathcal{H}(B)$. Wendet man Aufgabenteil 7(a) mit $x_0 = (0,0)$ und $r = 1$ auf u an, erhält man die Behauptung.

Bemerkung: Dies zeigt, dass das Dirichletproblem auf B^* im Gegensatz zum Dirichletproblem auf B im Allgemeinen nicht wohlgestellt ist: Das Problem ist nicht für alle Randdaten $g \in \mathrm{C}(\partial B^*)$ lösbar.