Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 29.05.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 4

10. *Parabolische Gleichungen auf* $\mathbb{R}$ *mit konstanten Koeffizienten und die Black-Scholes-Gleichung:* Sei $T > 0$, $\alpha > 0$, β, γ, λ und a in $\mathbb{R}$ und $w(t,x) := \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u(\alpha t, x)$ für $u \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R})$. Eine Funktion v in $\mathrm{C}([0,T)\times\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ heißt *exponentiell beschränkt*, falls es Konstanten A und c mit $|v(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ für alle $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}$ bzw. $|v(x)| \le A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt. Eine Funktion auf $[0,T)\times(0,\infty)$ heißt *polynomiell beschränkt*, falls es Konstanten A und c gibt, für die $|v(t,x)| \le Ax^c$ für $x \ge 1$ und $|v(t,x)| \le Ax^{-c}$ für $x \in (0,1)$ gilt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} v \in \mathrm{C}^{1,2}((0,\alpha T)\times\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,\alpha T)\times\mathbb{R}) \\ v_t = v_{xx} \text{ auf } (0,\alpha T)\times\mathbb{R} \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

für jede exponentiell beschränkte Funktion $v_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ genau eine exponentiell beschränkte Lösung v besitzt. In diesem Fall ist v durch

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{y^2}{4t}\right) v_0(x-y)\,\mathrm{d}y$$

gegeben.

(a) Zeige, dass genau dann $u_t = u_{xx}$ gilt, wenn $w_t = \alpha w_{xx} - 2a\alpha w_x + (\alpha a^2 - \lambda)w$ gilt! (3)

(b) Zeige, dass u genau dann exponentiell beschränkt ist, wenn w exponentiell beschränkt ist! (1)

(c) Zeige, dass es für eine exponentiell beschränkte Funktion $v_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ genau eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} v \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,T)\times\mathbb{R}) \\ v_t = \alpha v_{xx} + \beta v_x + \gamma v \text{ auf } (0,T)\times\mathbb{R} \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gibt, und finde eine explizite Lösungsformel! (3)

(d) Zeige, dass $V(t,x) := v(T-t, \log x)$ genau dann eine polynomiell beschränkte Lösung des Endwertproblems

$$\begin{cases} V \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)) \cap \mathrm{C}([0,T)\times(0,\infty)) \\ 0 = V_t + \alpha x^2 V_{xx} + (\alpha+\beta)xV_x + \gamma V \text{ auf } (0,T)\times(0,\infty) \\ V(T,x) = v_0(\log x) \text{ für } x \in (0,\infty) \end{cases}$$

ist, wenn v eine exponentiell beschränkte Lösung der Gleichung des vorigen Aufgabenteils ist! Das Problem hat also genau eine polynomiell beschränkte Lösung. (3)

(e) Leite die in der Vorlesung angegebene explizite Lösungsformel für die eindeutige polynomiell beschränkte Lösung der Black-Scholes-Gleichung

$$\begin{cases} V \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)) \cap \mathrm{C}([0,T)\times(0,\infty)) \\ 0 = V_t + \frac{\sigma^2}{2}x^2 V_{xx} + rxV_x - rV \text{ auf } (0,T)\times(0,\infty) \\ V(T,x) = (x-K)^+ \text{ für } x \in (0,\infty) \end{cases}$$

für Parameter $\sigma > 0$, $K > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ her! (5)

Erinnerung: $y^+ := \max\{y, 0\}$.

11. Sei (a, b) ein Intervall in $\mathbb{R}$, $(c, d) \subset (a, b)$ ein Teilintervall und $f \in H^1(a, b)$. Zeige, dass die Einschränkung $g := f|_{(c,d)}$ in $H^1(c, d)$ liegt und $g' = f'|_{(c,d)}$ erfüllt! (2)

12. Sei (a, b) ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_n = b$ eine Partition von $[a, b]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle. Wie üblich identifizieren wir in dieser Aufgabe Funktionen in $H^1(a, b)$ mit ihrem stetigen Repräsentanten auf $[a, b]$. Für $i = 1, \ldots, n$ sei f_i eine Funktion in $H^1(a_i, b_i)$ und es gelte $f_i(a_i) = f_{i-1}(b_{i-1})$ für $i = 2, \ldots, n$. Zeige, dass $f(x) := f_i(x)$, $x \in [a_i, b_i]$, eine Funktion $f \in H^1(a, b)$ definiert! (3)