Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 19.06.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 38+7

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 5

Sei (a, b) ein reelles Intervall. Wie auch sonst immer werden auch für die Aufgaben auf diesem Blatt Funktionen in $H^1(a, b)$ stets mit ihrem stetigen Repräsentanten identifiziert.

13. Zeige:

(a) Jede Funktion in $H^1(a, b)$ ist Hölder-stetig. Genauer: Es gilt

$$|f(x) - f(y)| \le \|f\|_{H^1(a,b)} |x - y|^{1/2}$$

für alle $f \in H^1(a, b)$ und alle $x, y \in [a, b]$. (2)

Bonusaufgabe: Für $f \in H^1(a, b)$ gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon |x - y|^{1/2}$$

für $|x - y| < \delta$. (2)

Lösung: Laut Vorlesung gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $x \in [a, b]$. Also hat man für $a \le x \le y \le b$ nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le \int_x^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbb{1}^2_{(x,y)}\,|f'| \le \Big(\int_a^b \mathbb{1}^2_{(x,y)}\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b \mathbb{1}^2_{(x,y)}\,|f'|^2\Big)^{1/2} \\ &= |x - y|^{1/2} \left\| f'|_{(x,y)} \right\|_{L^2(x,y)} \le \|f\|_{H^1(a,b)} |x - y|^{1/2}.\end{aligned}$$

Da die Aussage symmetrisch in x und y ist, zeigt dies die Behauptung.

Bonus: Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Lebesgue gibt es ein $c > 0$ mit der Eigenschaft, dass für die abgeschnittene Funktion $g_c := |f'|^2 \wedge c^2$

$$\int_a^b \big| |f'|^2 - g_c \big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Wähle $\delta < \frac{\varepsilon}{2c^2}$. Für $|x - y| < \delta$ mit $x \le y$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_x^y |f'|^2 &= \int_{(x,y)} (|f'|^2 - g_c) + \int_{(x,y)} g_c \\ &\le \tfrac{\varepsilon}{2} + c^2 |x - y| \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Da die Lösung der Aufgabe eigentlich sogar die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^{1/2} \int_x^y |f'|^2$$

zeigt, folgt aus dieser Überlegung die Zusatzbehauptung.

(b) Sei $f_\alpha(x) := x^\alpha$ für $\alpha \in (0,1)$ und $x \in [0,1]$. Für $\alpha > 1/2$ liegt f_α in $H^1(0,1)$, für $\alpha < 1/2$ hingegen nicht. (3)
Bemerkung: Insbesondere gibt es also Funktionen in $\mathrm{C}^1(0,1) \cap \mathrm{C}[0,1]$, die nicht in $H^1(0,1)$ liegen.
Bonusfrage: Liegt $f_{1/2}$ in $H^1(0,1)$? (1)

Lösung: Sei $\alpha < 1/2$. Dann ist für $x = 0$

$$\frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x-y|^{1/2}} = |x-y|^{\alpha - \frac{1}{2}},$$

was für $y \to 0$ unbeschränkt ist. Also kann f_α nach der vorigen Teilaufgabe nicht in $H^1(0,1)$ liegen.
Sei nun $\alpha > \frac{1}{2}$ und $g(x) := \alpha x^{\alpha-1}$. Dann liegt g wegen $2\alpha - 2 > -1$ in $L^2(0,1)$. Nach der Formel für die partielle Integration gilt

$$\int_0^1 f_\alpha v' = -\int_0^1 gv$$

für alle $v \in \mathrm{C}_c^1(0,1)$, wobei die Integrale nach Definition von $\mathrm{C}_c^1(0,1)$ sogar als Riemann-Integrale aufgefasst werden können, die nicht einmal uneigentlich sind. Also liegt f_α in $H^1(0,1)$ mit $f_\alpha' = g$, denn $f_\alpha \in L^2(0,1)$ ist offensichtlich.
Bonus: Die Bonusaufgabe des vorigen Aufgabenteils zeigt $f_{1/2} \notin H^1(0,1)$. Dies kann man aber auch einfacher sehen, indem man beispielsweise unter Verwendung von Aufgabe 11 zeigt, dass für die schwache Ableitung $f_{1/2}'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$ gelten müsste, falls $f_{1/2}$ in $H^1(0,1)$ läge. Dann wäre aber $f_{1/2}'$ nicht in $L^2(0,1)$.

14. Sei (a,b) beschränkt und (f_n) eine Folge in $H^1(a,b)$. Die Folge (f_n') konvergiere in $L^2(a,b)$ gegen ein g in $L^2(a,b)$. Weiterhin gebe es ein $x_0 \in [a,b]$, für das die reelle Folge $(f_n(x_0))$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass (f_n) dann in der Norm von $H^1(a,b)$ gegen ein $f \in H^1(a,b)$ konvergiert, das $f' = g$ und $f(x_0) = c$ erfüllt! (4)
Bonusfrage: Bleibt das Resultat für $(a,b) = \mathbb{R}$ richtig? (2)

Lösung: Setze

$$f(x) := c + \int_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Laut Vorlesung liegt f in $H^1(a,b)$ und es gilt $f' = g$ und $f(x_0) = c$. Da man laut Vorlesung die Darstellung

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

hat, folgt

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x_0) - c| + \int_a^b |f_n' - g| \\ &\le |f_n(x_0) - c| + \|f_n' - g\|_{L^2(a,b)}(b-a)^{1/2} \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

aus den Voraussetzungen. Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen f und somit insbesondere in $L^2(a,b)$. Nach Voraussetzung konvergiert (f_n') gegen $g = f'$. Insgesamt erhält man daraus wegen

$$\|f_n - f\|_{H^1(a,b)}^2 = \|f_n - f\|_{L^2(a,b)}^2 + \|f_n' - f'\|_{L^2(a,b)}^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

die Konvergenz von (f_n) gegen f in $H^1(a,b)$.

Bonus: Wir geben ein Gegenbeispiel für $(a, b) = \mathbb{R}$ an. Setze dazu

$$h_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -(n+1)) \cup ((n+1), \infty), \\ 1, & x \in (-n, n), \\ n+1+x, & x \in [-(n+1), -n], \\ n+1-x, & x \in [n, n+1]. \end{cases}$$

Dann folgt aus Aufgabe 12 und der schwachen Differenzierbarkeit klassisch differenzierbarer Funktionen, dass h_n in $H^1(\mathbb{R})$ liegt und die Ableitung

$$h_n'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -(n+1)) \cup (-n, n) \cup ((n+1), \infty), \\ 1, & x \in [-(n+1), n], \\ -1, & x \in [n, n+1] \end{cases}$$

ist. Inbesondere ist $\sqrt{2n} \leq \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2n+2}$ und $\|h_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}$. Setzt man nun $c_n := n^{-1/2}$, so definiert $f_n := c_n h_n$ eine (beschränkte) Folge in $H^1(\mathbb{R})$ mit $f_n(0) = c_n \to 0$ und $f_n' \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$. Würde nun also (f_n) in $H^1(\mathbb{R})$ gegen ein $f \in H^1(\mathbb{R})$ konvergieren, so wäre insbesondere $f(0) = 0$ und $f' = 0$, also laut Vorlesung $f = 0$. Aber wegen $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \sqrt{2}$ konvergiert (f_n) nicht einmal in $L^2(\mathbb{R})$ gegen 0.

15. Sei $f \in H^1(a, b)$ und (a, b) beschränkt. Zeige:

(a) Die Funktion f ist genau dann in $\mathrm{C}^1[a, b]$, wenn f' in $\mathrm{C}[a, b]$ liegt. (2)

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $f \in \mathrm{C}^1[a, b]$ die schwache mit der klassischen Ableitung übereinstimmt. Nach Definition ist in diesem Fall also $f' \in \mathrm{C}[a, b]$.
Sei nun $f \in H^1(a, b)$ und die schwache Ableitung f' auf $[a, b]$ stetig. Aus

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass f in $\mathrm{C}^1[a, b]$ liegt und f' mit der klassischen Ableitung von f übereinstimmt.

(b) Die Funktion f ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn f' in $L^\infty(a, b)$ liegt. (4)
Bonusaufgabe: Bestimme die Lipschitzkonstante von f in Abhängigkeit von f'! (2)

Lösung: Sei zuerst $f' \in L^\infty(a, b)$. Dann folgt aus der Darstellung von f als unbestimmtes Integral für $x \leq y$

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq |x - y| \left\|f'\right\|_{L^\infty(a,b)},$$

also gerade die Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante $\|f'\|_\infty$.
Sei nun umgekehrt $f \in H^1(a, b)$ Lipschitz-stetig. Dann gilt

$$\left|\left(f' \middle| \mathbb{1}_{(x,y)}\right)_{L^2(a,b)}\right| = \left|\int_x^y f'\right| = |f(y) - f(x)| \leq L|y - x| = L \left\|\mathbb{1}_{(x,y)}\right\|_{L^1(a,b)}$$

für $x < y$, wobei $L \geq 0$ die Lipschitz-Konstante von f bezeichnet. Man rechnet leicht nach, dass dann auch

$$\left|\left(f' \middle| h\right)_{L^2(a,b)}\right| \leq L\|h\|_{L^1(a,b)}$$

für jede Treppenfunktion h gilt.
Sei nun $g \in L^2(a, b)$ beliebig gewählt. Dann gibt es eine Folge (h_n) von Treppenfunktionen mit $\|h_n - g\|_{L^2(a,b)} \to 0$, wie aus der Maßtheorievorlesung bekannt sein sollte;

ein möglicher Beweis verläuft so, dass man zuerst zeigt, dass sich jede messbare Menge durch eine endliche Vereinigung offener Intervalle im Maß approximieren lässt, woraus dann leicht die Behauptung folgt. Dann konvergiert wegen

$$\|h_n - g\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |h_n - g| \leq (b-a)^{1/2} \int_a^b |h_n - g|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

auch $(\|h_n\|_{L^1(a,b)})$ gegen $\|g\|_{L^1(a,b)}$, woraus dank Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\Big|\int_a^b f'g\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\big(f'\big|h_n\big)_{L^2(a,b)}\Big| \leq \lim_{n\to\infty} L\|h_n\|_{L^1(a,b)} = L\|g\|_{L^1(a,b)}$$

folgt.

Für $\varepsilon > 0$ sei nun $A_\varepsilon := \{|f'| \geq L + \varepsilon\} \subset (a,b)$. Setzt man in obige Ungleichung speziell $g_\varepsilon := \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \operatorname{sgn} f'$ ein, erhält man

$$\lambda(A_\varepsilon)(L+\varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} |f'| = \int_a^b f'g_\varepsilon \leq L\|g_\varepsilon\|_{L^1(a,b)} = L\lambda(A_\varepsilon),$$

was offenbar nur für $\lambda(A_\varepsilon) = 0$ erfüllt sein kann. Da A_ε für jedes $\varepsilon > 0$ eine Nullmenge ist, ist nach Definition $f' \in L^\infty(a,b)$ und $\|f'\|_\infty \leq L$.

Bonus: Man sieht aus dem Beweis, dass $\|f'\|_\infty$ die Lipschitz-Konstante von f ist.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass jede Lipschitz-stetige Funktion in $H^1(a,b)$ ist, siehe Aufgabe 53 auf Übungsblatt 13 der Funktionalanalysisvorlesung des Wintersemesters 2008/09.

16. Zeige, dass für $f \in H^1(\mathbb{R})$ stets $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ gilt, also $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ ist! (5)
Tipp: Unter der Zusatzannahme $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ist der Beweis etwas einfacher, während der allgemeine Fall noch eine Zusatzüberlegung benötigt.

Lösung: Sei $f \in H^1(\mathbb{R})$. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Gegebenenfalls nach Spiegelung dürfen wir also $\beta := \limsup_{x\to\infty} f(x) > 0$ annehmen. Zudem ist $\alpha := \liminf_{x\to\infty} f(x) \leq 0$, denn anderenfalls gäbe es ein x_0 mit $f(x) \geq \frac{\alpha}{2}$ für $x \geq x_0$, was

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 \geq \int_{x_0}^\infty \frac{\alpha^2}{4} = \infty$$

im Widerspruch zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ implizieren würde. Wähle nun α' und β' mit $0 < \alpha' < \beta' < \beta$. Wegen $\alpha < \alpha'$, nach Definition von α und β und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es Folgen (x_n) und (y_n) mit

$$x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n < y_n < x_{n+1} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

$f(x_n) = \alpha'$, $f(y_n) = \beta'$ und $f(t) \geq \alpha'$ für $t \in [x_n, y_n]$. Wegen

$$(\alpha')^2 \sum_{n=1}^\infty (y_n - x_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{y_n} f^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 < \infty$$

ist $(y_n - x_n)_n$ eine Folge in ℓ^1 und somit insbesondere beschränkt. Sei also $M > 0$ so gewählt, dass $|y_n - x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aus der Darstellung von H^1-Funktionen als unbestimmtes Integral ihrer Ableitung ergibt sich mittels der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung somit

$$\begin{aligned}\beta' - \alpha' = f(y_n) - f(x_n) &= \int_{x_n}^{y_n} f' \leq \int_{x_n}^{y_n} |f'| \\ &\leq \Big(\int_{x_n}^{y_n} |f'|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{x_n}^{y_n} 1^2\Big)^{1/2} \leq M^{1/2}\Big(\int_{x_n}^{y_n} |f'|^2\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

woraus

$$\int_{\mathbb{R}} |f'|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f'|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta' - \alpha')^2}{M} = \infty$$

im Widerspruch zu $f' \in L^2(\mathbb{R})$ folgt.

Bemerkung: Setzt man zudem $f' \in L^1(\mathbb{R})$ voraus, hat man bei der Wahl der (x_n) und (y_n) mehr Freiheiten, kann auf die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung verzichten und muss nicht zeigen, dass $(y_n - x_n)_n$ beschränkt ist.

Konsequenz: Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt aus dieser Aufgabe, dass es eine Konstante $c > 0$ mit $|f(x)| \leq c\|f\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $f \in H^1(\mathbb{R})$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gibt. Wüsste man dies bereits aus anderen Gründen, was wiederum mit der Situation $f' \in L^1(\mathbb{R})$ zu tun hat, könnte man für diese Aufgabe auch anders argumentieren: Man approximiert f in $H^1(\mathbb{R})$ durch eine Folge f_n von Funktionen mit kompaktem Träger. Da diese in $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ liegt und nach obiger Abschätzung in der Norm von $\mathrm{C}_b(\mathbb{R})$ konvergiert, folgt $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$.

Alternativer Beweis: Kennt man ein wenig mehr Fouriertheorie, so ergibt sich die Aussage dieser Aussage aus der Tatsache, dass die Fouriertransformation $H^1(\mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R})$ abbildet, als einfache Anwendung des Satzes von Riemann-Lebesgue.

17. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\lambda \geq 0$ und $\beta > 0$. Wir untersuchen das elliptische Problem mit *inhomogenen gemischten Neumann- und Robin-Randbedingungen*

$$(P_{f,A,B}) \begin{cases} u \in H^2(a, b), \\ \lambda u - u'' = f \text{ auf } (a, b), \\ \beta u(a) - u'(a) = A, \\ u'(b) = B \end{cases}$$

für $f \in L^2(a, b)$ und reelle Zahlen A und B. Sei $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a, b) \times H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$a_{\lambda,\beta}(u, v) := \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a)$$

für u und v aus $H^1(a, b)$ definiert. Zeige:

(a) Die Form $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a, b) \times H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ ist bilinear, symmetrisch und stetig. (3)

Lösung: Die Bilinearität und Symmetrie sind offensichtlich. Seien (u_n) und (v_n) in $H^1(a, b)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten u und v. Dann konvergieren nach Vorlesung (u_n') und (v_n') in $L^2(a, b)$ gegen u' und v', und (u_n) und (v_n) konvergieren sogar gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen u und v. Insbesondere konvergieren $(u_n(a))$ und $(v_n(a))$ gegen $u(a)$ und $v(a)$. Da das Skalarprodukt stetig ist, konvergiert

$$a_{\lambda,\beta}(u_n, v_n) = \lambda \left(u_n | v_n\right)_{L^2(a,b)} + \left(u_n' | v_n'\right)_{L^2(a,b)} + \beta u_n(a)v_n(a)$$

gegen $a_{\lambda,\beta}(u, v)$, was die Stetigkeit der Bilinearform zeigt.

(b) Die Form $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a, b) \times H^1(a, b)$ ist koerziv, d.h. $a_{\lambda,\beta}(u, u) \geq \eta\|u\|^2_{H^1(a,b)}$ für alle $u \in H^1(a, b)$, wobei η eine positive Konstante ist. (3)
Hinweis: Beachte, dass auch $\lambda = 0$ zugelassen ist.

Lösung: Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $u_n \in H^1(a, b)$ mit

$$\|u_n'\|^2_{L^2(a,b)} + \beta u_n(a)^2 \leq a_{\lambda,\beta}(u_n, u_n) < \tfrac{1}{n}\|u_n\|^2_{H^1(a,b)},$$

wobei man nach Skalierung $\|u_n\|_{H^1(a,b)} = 1$ annehmen darf. Wegen $\beta > 0$ kann man hieraus ablesen, dass die Folge (u_n') in $L^2(a, b)$ und die reelle Folge $(u_n(a))$ jeweils eine Nullfolgen ist. Nach Aufgabe 14 konvergiert (u_n) in $H^1(a, b)$ gegen eine Funktion u mit $u' = 0$ und $u(a) = 0$, was laut Vorlesung nur für $u = 0$ erfüllt sein kann. Dies widerspricht allerdings der Annahme $\|u_n\|_{H^1(a,b)} = 1$.

(c) Für alle $f \in L^2(a,b)$ gibt es genau ein $u \in H^1(a,b)$ mit

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) = \int_a^b fv$$

für alle $v \in H^1(a,b)$. (2)

Lösung: Die Zuordnung

$$v \mapsto \int_a^b fv$$

ist ein stetiges, lineares Funktional auf $H^1(a,b)$, wie einfach zu sehen ist und schon in der Vorlesung gezeigt wurde. Da $a_{\lambda,\beta}$ eine stetige, koerzive Bilinearform ist, folgt aus dem Satz von Lax-Milgram die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in H^1(a,b)$ dieser Gleichung.

(d) Seien f und u in $H^1(a,b)$. Es gilt genau dann

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) = \int_a^b fv \text{ für alle } v \in H^1(a,b),$$

wenn u das Problem $(P_{f,0,0})$ löst. (3)

Lösung: Sei zuerst u eine Lösung von $(P_{f,0,0})$. Nach der Formel für die partielle Integration in $H^1(a,b)$ gilt dann

$$\begin{aligned} a_{\lambda,\beta}(u,v) &= \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a) \\ &= \lambda \int_a^b uv + u'v\Big|_a^b - \int_a^b u''v + \beta u(a)v(a) \\ &= \lambda \int_a^b uv - u'(a)v(a) - \int_a^b (\lambda u - f)v + \beta u(a)v(a) \\ &= \int_a^b fv \end{aligned}$$

für alle $v \in H^1(a,b)$.
Sei nun umgekehrt $u \in H^1(a,b)$ und

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) = \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a) = \int_a^b fv \text{ für alle } v \in H^1(a,b).$$

Speziell gilt dann

$$\int_a^b u'v' = -\int_a^b (\lambda u - f)v \text{ für alle } v \in \mathrm{C}_c^1(a,b),$$

was nach Definition $u' \in H^1(a,b)$, also $u \in H^2(a,b)$, mit $u'' = \lambda u - f$ bedeutet. Somit erfüllt u Differentialgleichung, woraus mit der Formel für die partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b fv = a_{\lambda,\beta}(u,v) &= \lambda \int_a^b uv + u'v\Big|_a^b - \int_a^b u''v + \beta u(a)v(a) \\ &= \int_a^b fv + u'(b)v(b) + \big(\beta u(a) - u'(a)\big)v(a) \end{aligned}$$

für alle $v \in H^1(a,b)$ folgt. Daraus ergibt sich

$$u'(b)v(b) + \big(\beta u(a) - u'(a)\big)v(a) = 0 \text{ für alle } v \in H^1(a,b).$$

Setzt man speziell $v(x) := x-a$ ein, zeigt dies $u'(b) = 0$, während man für $v(x) := x-b$ die Aussage $\beta u(a) - u'(a) = 0$ erhält. Insgesamt zeigt dies, dass u das Problem $(P_{f,0,0})$ löst.

(e) Es gibt Funktionen f_1 und f_2 in $L^2(a,b)$, für die die Probleme $(P_{f_1,1,0})$ und $(P_{f_2,0,1})$ Lösungen besitzen. Für diese Lösungen schreiben wir h_1 und h_2. (2)

Lösung: Setze $h_1(x) := \beta^{-1}$ und $h_2(x) := x + \beta^{-1} - a$. Es ist sehr leicht, zu sehen, dass diese Funktionen die entsprechenden Probleme für $f_i := \lambda h_i - h_i'' = \lambda h_i$ lösen.

(f) Eine Funktion u ist genau dann eine Lösung von $(P_{f,A,B})$, wenn $u - Ah_1 - Bh_2$ das Problem $(P_{f-Af_1-Bf_2,0,0})$ löst. (1)

Lösung: Allgemeiner gilt: Ist u eine Lösung von (P_{f_1,A_1,B_1}) und v eine Lösung von (P_{f_2,A_2,B_2}), so löst $\mu u + v$ das Problem $(P_{\mu f_1+f_2,\mu A_1+A_2,\mu B_1+B_2})$. Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Die Situation ist ähnlich wie bei linearen Gleichungssystemen, wo sich die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Gleichung als eine Verschiebung der Lösungsmenge der homogenen Gleichung um eine partikuläre Lösung ergibt.

(g) Es gibt eine eindeutige Lösung von $(P_{f,A,B})$. (2)

Lösung: Das Problem $(P_{f-Af_1-Bf_2,0,0})$ ist nach den Aufgabenteilen (c) und (d) eindeutig lösbar. Nach Aufgabenteil (f) ist dann auch $(P_{f,A,B})$ eindeutig lösbar.

(h) Ist f stetig auf $[a,b]$, so liegt die eindeutige Lösung von $(P_{f,A,B})$ in $\mathrm{C}^2[a,b]$ und ist somit eine klassische Lösung. (2)

Lösung: Nach Voraussetzung ist u in $H^2(a,b)$ mit $\lambda u - u'' = f$. Laut Vorlesung ist u stetig, woran man sieht, dass auch $u'' = \lambda u - f$ stetig ist. Aus Aufgabe 15 folgt, dass u' in $\mathrm{C}^1[a,b]$ liegt. Da insbesondere u' stetig und somit $u \in \mathrm{C}^1[a,b]$ mit $u' \in \mathrm{C}^1[a,b]$ ist, ist u nach Definition in $\mathrm{C}^2[a,b]$.