Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 26.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

# Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 6

**18.** *Produktregel (Variante):* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeige, dass für $u$ und $v$ in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ auch das Produkt $uv$ in $H^1(\Omega)$ liegt und $D_j(uv) = D_j u\, v + u\, D_j v$ gilt! (3)

**19.** *Kettenregel (Variante):* Sei $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Zeige, dass die Zuordnung $\varphi(u) := f \circ u$ eine Abbildung $\varphi\colon H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ definiert und $D_j \varphi(u) = (f' \circ u)\, D_j u$ gilt! (2)

**20.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ mit $D_j u = 0$ für $j = 1, \dots, d$. Zeige:

(a) Die Funktion $u$ ist *lokal konstant*, d.h. es gibt zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass $u$ für fast alle $x \in B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$ mit einer Konstanten $c = c(x_0) \in \mathbb{R}$ übereinstimmt! (3)
**Tipp:** Zeige zuerst, dass die regularisierten Funktionen $\varrho_n * u$ lokal konstant sind!

(b) Ist $\Omega$ zudem zusammenhängend, so ist $u$ konstant, d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $u(x) = c$ für fast alle $x \in \Omega$. (1)

**21.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u$ und $v$ in $H^1(\Omega)$. Zeige, dass auch $w := u \wedge v$, definiert durch $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$, in $H^1(\Omega)$ liegt, und bestimme die schwache Ableitung! (2)

**22.** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Abbildungen $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ und $u \mapsto |u|$ den Raum $H^1(\Omega)$ in sich selbst abbilden. Zeige, dass diese Abbildungen sogar stetig sind! (3)
**Erinnerung (Umkehrung des Satzes von Lebesgue):** Konvergiert $(f_n)$ in $L^2(\Omega)$ gegen $f$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})$, die punktweise gegen $f$ konvergiert, und eine Funktionen $g \in L^2(\Omega)$ mit $|f_{n_k}| \le g$ fast überall.

**23.** Sei $d \ge 3$. Zeige:

(a) Sei

$$\varrho(x) := \mathrm{e}^{\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}}\, \mathbb{1}_{\{|x|\le 1\}} \quad \text{und} \quad u_n(x) := \varrho(nx).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\varrho$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ liegt. Die Folge $(u_n)$ konvergiert trotz $u_n(0) = 1$ in der Norm von $H^1(\mathbb{R}^d)$ gegen 0. (2)
**Bemerkung:** Dies zeigt, dass $H^1(\Omega)$ nicht stetig in $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ eingebettet ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist also nicht einmal $H^1(\Omega) \subset \mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

(b) Es gibt eine Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$, die nicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt! (2)

(c) Es gibt eine Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$, die auf keiner offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt ist! (2)