Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 03.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 26

# Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 7

**24.** *Im Allgemeinen ist $H^1(\Omega) \neq H^1_0(\Omega)$:* In dieser Aufgabe sollen nur Resultate verwendet werden, die in der Vorlesung oder der Übung *bewiesen* wurden.

(a) Sei $\Omega$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass unendlich viele der Funktionen $u_\alpha(x,y) := 1 + \alpha x^2 + \alpha y^2$, $\alpha > 0$, in $H^1(\Omega)$, aber nicht in $H^1_0(\Omega)$ liegen! (2)

(b) Finde (mit Beweis) $\Omega \subset \mathbb{R}^{17}$ mit $H^1(\Omega) \neq H^1_0(\Omega)$! (2)

**25.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen (nicht notwendigerweise beschränkt). Zeige:

(a) Ist $u \in H^1(\Omega)$, so ist auch $u \wedge \mathbb{1}_\Omega$ in $H^1(\Omega)$. Bestimme die Ableitung! (2)

(b) $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. (2)

**26.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Mit der *Lipschitz-Konstanten* $\operatorname{Lip}(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}$ sei $\operatorname{Lip}(\Omega) := \{f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}) : \operatorname{Lip}(f) < \infty\}$ und $\|f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} := \|f\|_{L^2(\Omega)} + \operatorname{Lip}(f)$. Zeige:

(a) $\|\cdot\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\operatorname{Lip}(\Omega)$. (1)

(b) Ist $(f_n)$ eine Folge in $\operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\sup_n \operatorname{Lip}(f_n) < \infty$, die punktweise gegen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert, so liegt auch $f$ in $\operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\operatorname{Lip}(f_n) \leq \liminf_n \operatorname{Lip}(f_n)$. (2)

(c) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$ für alle $f \in \operatorname{Lip}(\Omega)$. (2)

(d) $\operatorname{Lip}(\Omega)$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$. (2)

**27.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$, $D_j u \in \mathrm{C}(\Omega)$. Definiere $u_n := \varrho_n * u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_n)$ auf der Menge $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(u_n)$ für jedes $U \Subset \Omega$ in $H^1(U)$ gegen $u$ konvergiert und $D_j u_n = \varrho_n * D_j u$ ist. Zeige:

(a) Ist $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert $(\varrho_n * v)$ auf jedem $U \Subset \Omega$ gleichmäßig gegen $v$. (2)

(b) Sei $U \Subset \Omega$ konvex. Für $v \in \mathrm{C}^1(\overline{U})$ gilt $\operatorname{Lip}(v) \leq \|\nabla v\|_\infty$. (1)

(c) Für jede konvexe Menge $U \Subset \Omega$ gibt einen Repräsentanten von $u|_U$ in $\operatorname{Lip}(U)$. Folglich ist $u \in \mathrm{C}(\Omega)$. (2)
**Tipp:** Zeige, dass $(u_n)$ in $\operatorname{Lip}(U)$ eine Cauchy-Folge ist!

(d) Sei $U \Subset \Omega$ konvex. Ist $U \subset \Omega_n$, so gilt

$$\big|u_n(y) - u_n(x) - \nabla u_n(x)(y-x)\big| \leq |y-x| \sup_{z \in U} \big|\nabla u_n(z) - \nabla u_n(x)\big|.$$

für alle $x$ und $y$ in $U$. (1)

(e) Ist $U \Subset \Omega$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|\nabla u_n(y) - \nabla u_n(x)\big| \leq \varepsilon$$

für $n \geq n_0$ und $x, y \in U$ mit $|y-x| < \delta$. (2)

(f) $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$. (3)