Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 03.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Sommersemester 2009
Punktzahl: 26

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 7

24. *Im Allgemeinen ist* $H^1(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$*:* In dieser Aufgabe sollen nur Resultate verwendet werden, die in der Vorlesung oder der Übung *bewiesen* wurden.

(a) Sei Ω die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass unendlich viele der Funktionen $u_\alpha(x,y) := 1 + \alpha x^2 + \alpha y^2$, $\alpha > 0$, in $H^1(\Omega)$, aber nicht in $H_0^1(\Omega)$ liegen! (2)

Lösung: Offenbar ist $u_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Man kann beobachten, dass u_α für $\alpha \to 0$ gegen $\mathbb{1}_\Omega$ konvergiert. Wären alle bis auf endlich viele u_α in $H_0^1(\Omega)$, so wäre auch ihr Grenzwert in $H_0^1(\Omega)$, was aber mit dem gleichen Argument wie im zweiten Aufgabenteil nicht der Fall ist.

Alternativer Ansatz mit Poincaré: Laut Vorlesung gibt es eine Konstante $c > 0$, für die die Poincaré-Ungleichung

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt ist. Es genügt also, sich zu überlegen, dass diese Ungleichung für unendlich viele u_α nicht erfüllt ist. Dies folgt aber direkt aus

$$\|u_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\pi \int_0^1 (1 + \alpha r^2)^2 r \,\mathrm{d}r = \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

und

$$\|\nabla u_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\pi \int_0^1 (\alpha r)^2 r \,\mathrm{d}r = \frac{\alpha^2}{4} \to 0 \quad (\alpha \to 0).$$

(b) Finde (mit Beweis) $\Omega \subset \mathbb{R}^{17}$ mit $H^1(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$! (2)

Lösung: Sei Ω die Einheitskugel im $\mathbb{R}^{17}$ und $u := \mathbb{1}_\Omega$. Dann ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ und $\nabla u = 0$. Wäre $u \in H_0^1(\Omega)$, so wäre nach nach Vorlesung $u = 0$, was aber nicht der Fall ist.

25. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen (nicht notwendigerweise beschränkt). Zeige:

(a) Ist $u \in H^1(\Omega)$, so ist auch $u \wedge \mathbb{1}_\Omega$ in $H^1(\Omega)$. Bestimme die Ableitung! (2)

Lösung: Wir weisen nach, dass $w := \mathbb{1}_{\{u<1\}}\, D_j u$ die Bedingungen an die schwache Ableitung von $v := u \wedge \mathbb{1}_\Omega$ nach x_j erfüllt. Da $w \in L^2(\Omega)$ offensichtlich ist, folgt daraus die Behauptung.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Testfunktion und U eine beschränkte offene Teilmenge von Ω, die $\operatorname{supp}\varphi$ enthält. Weil $u|_U$ und $\mathbb{1}_U$ in $H^1(U)$ liegen, folgt aus Aufgabe 21, dass $v|_U = u|_U \wedge \mathbb{1}_U$ in $H^1(U)$ liegt und die Ableitung $D_j(v|_U) = D_j(v|_U)\,\mathbb{1}_{\{u<1\}} = w|_U$ hat. Daher gilt

$$\int_\Omega v D_j \varphi = \int_U v|_U D_j\varphi = -\int_U D_j(v|_U)\varphi = -\int_U w|_U \varphi = -\int_\Omega w\varphi,$$

was gerade die Behauptung zeigt.

(b) $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. (2)

Lösung: Wegen $u \wedge c\,\mathbb{1} = c(\frac{u}{c} \wedge \mathbb{1})$ und $u \vee -c\,\mathbb{1} = -c(\frac{u}{-c} \wedge \mathbb{1})$ für $c > 0$ ist nach dem vorigen Aufgabenteil für jedes $u \in H^1(\Omega)$ die Funktion $u_n := (u \wedge n\,\mathbb{1}) \vee -n\,\mathbb{1}$ wieder in $H^1(\Omega)$ mit $D_j u_n = \mathbb{1}_{\{|u|<n\}}\, D_j u$. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert (u_n) in $H^1(\Omega)$ gegen u. Da jedes u_n offenbar ist $L^\infty(\Omega)$ liegt, zeigt dies die Behauptung.

26. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Mit der *Lipschitz-Konstanten* $\operatorname{Lip}(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}$ sei $\operatorname{Lip}(\Omega) := \{f \in C(\overline{\Omega}) : \operatorname{Lip}(f) < \infty\}$ und $\|f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} := \|f\|_{L^2(\Omega)} + \operatorname{Lip}(f)$. Zeige:

(a) $\|\cdot\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\operatorname{Lip}(\Omega)$. (1)

Lösung: Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig. Dann ist

$$|f(y)| \leq |f(y)-f(x_0)|+|f(x_0)| \leq \operatorname{Lip}(f)|y-x_0|+|f(x_0)| \leq \operatorname{Lip}(f)\operatorname{diam}(\Omega)+|f(x_0)|,$$

was $f \in L^\infty(\Omega)$ und somit $f \in L^2(\Omega)$ zeigt, also $\|f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} < \infty$. Die Vektorraumaxiome und die übrigen Eigenschaften einer Norm sind offensichtlich erfüllt.

(b) Ist (f_n) eine Folge in $\operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\sup_n \operatorname{Lip}(f_n) < \infty$, die punktweise gegen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert, so liegt auch f in $\operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\operatorname{Lip}(f_n) \leq \liminf_n \operatorname{Lip}(f_n)$. (2)

Lösung: Sei $M := \liminf_n \operatorname{Lip}(f_n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge (f_{n_k}) mit

$$\frac{|f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)|}{|y-x|} \leq \operatorname{Lip}(f_{n_k}) \leq M + \varepsilon.$$

Durch Grenzübergang erhält man

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \leq M + \varepsilon$$

für alle $x \neq y$. Nach Definition zeigt dies $\operatorname{Lip}(f) \leq M + \varepsilon$, insbesondere also $f \in \operatorname{Lip}(\Omega)$. Weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, ergibt sich auch $\operatorname{Lip}(f) \leq M$.

Nach Definition von $\operatorname{Lip}(\Omega)$ ist auch noch $f \in C(\overline{\Omega})$ nachzuweisen. Dies folgt aber sofort aus $\operatorname{Lip}(f) < \infty$.

(c) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$ für alle $f \in \operatorname{Lip}(\Omega)$. (2)

Lösung: Wäre die Aussage falsch, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in \operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\|f_n\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} \leq \frac{1}{n}\|f_n\|_\infty$. Nach Skalierung darf man $\|f_n\|_\infty = 1$ annehmen. Dann konvergiert (f_n) also in $\operatorname{Lip}(\Omega)$ gegen 0, insbesondere also auch in $L^2(\Omega)$ und somit fast überall. Es gibt also einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $f_n(x_0) \to 0$. Nun folgt aber wieder

$$|f_n(x)| \leq \operatorname{diam}(\Omega)\operatorname{Lip}(f_n) + |f_n(x_0)| \leq \varepsilon$$

für $n \geq n_0(\varepsilon)$ mit $\varepsilon < 1$ und alle $x \in \Omega$, also $\|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ im Widerspruch zu $\|f_n\|_\infty = 1$.

(d) $\operatorname{Lip}(\Omega)$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)}$. (2)

Lösung: Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\operatorname{Lip}(\Omega)$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist (f_n) eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\Omega)$. Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ der gleichmäßige Grenzwert von (f_n) und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann konvergiert $(f_n - f_m)$ mit $m \to \infty$ punktweise gegen $f_n - f$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{Lip}(f_n - f_m) < \varepsilon$ für $m, n \geq n_0(\varepsilon)$. Daraus folgt wie oben bewiesen $\operatorname{Lip}(f_n - f) \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$ und insbesondere $f \in \operatorname{Lip}(\Omega)$ dank der Vektorraumstruktur. Da bereits die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f bekannt ist, zeigt dies $\|f_n - f\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} \to 0$, also die Konvergenz der Folge (f_n) in $\operatorname{Lip}(\Omega)$.

Hinweis: Vergleiche hierzu auch Aufgabe 9 auf Blatt 3 der Funktionalanalysisvorlesung im Wintersemester 2008/09.

27. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$, $D_j u \in C(\Omega)$. Definiere $u_n := \varrho_n * u \in C^\infty(\Omega_n)$ auf der Menge $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass (u_n) für jedes $U \Subset \Omega$ in $H^1(U)$ gegen u konvergiert und $D_j u_n = \varrho_n * D_j u$ ist. Zeige:

(a) Ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert $(\varrho_n * v)$ auf jedem $U \Subset \Omega$ gleichmäßig gegen v. (2)

Lösung: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U \subset \Omega_n$ für $n \geq n_0$. Daher ist Konvergenz auf U wohldefiniert. Wähle eine Menge V mit $U \Subset V \Subset \Omega$. Sei $\varepsilon > 0$. Da v auf $\overline{V}$ sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|v(y) - v(x)| \le \varepsilon$ für alle $x, y \in V$ mit $|x - y| \le \delta$. Nun erhält man

$$|(\varrho_n * v)(x) - v(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_n(y)\, |v(x-y) - v(x)| \,\mathrm{d}y \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_n(y) \,\mathrm{d}y = \varepsilon,$$

falls $\frac{1}{n} < \delta$ und $x \in U$ ist und $\frac{1}{n} < \operatorname{dist}(U, V^c)$ gilt. Das zeigt die gleichmäßige Konvergenz von $\varrho_n * v$ auf U gegen v.

(b) Sei $U \Subset \Omega$ konvex. Für $v \in \mathrm{C}^1(\overline{U})$ gilt $\operatorname{Lip}(v) \le \|\nabla v\|_\infty$. (1)

Lösung: Nach dem Mittelwertsatz aus Analaysis II gibt es für alle $x, y \in U$ mit $x \ne y$ ein $\xi \in [x, y] \subset U$ mit

$$\frac{|v(y) - v(x)|}{|y - x|} = \frac{|\nabla v(\xi)(y - x)|}{|y - x|} \le |\nabla v(\xi)| \le \|\nabla v\|_\infty.$$

(c) Für jede konvexe Menge $U \Subset \Omega$ gibt einen Repräsentanten von $u|_U$ in $\operatorname{Lip}(U)$. Folglich ist $u \in \mathrm{C}(\Omega)$. (2)
Tipp: Zeige, dass (u_n) in $\operatorname{Lip}(U)$ eine Cauchy-Folge ist!

Lösung: Nach dem ersten Aufgabenteil konvergiert $(D_j u_n)$ für alle $j = 1, \dots, d$ auf U gleichmäßig gegen $D_j u$, was die gleichmäßige Konvergenz von ∇u_n zeigt. Es ergibt sich also aus dem vorigen Aufgabenteil

$$\operatorname{Lip}(u_n|_U - u_m|_U) \le \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^\infty(U)} \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Da (u_n) in $L^2(U)$ gegen u konvergiert und daher auch dort eine Cauchy-Folge ist, ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $\operatorname{Lip}(U)$, konvergiert also gegen ein $v \in \operatorname{Lip}(U)$. Da (u_n) in $L^2(U)$ gegen v konvergiert, folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts, dass v fast überall mit $u|_U$ übereinstimmt, $u|_U$ also den auf U Lipschitz-stetigen Repräsentanten v besitzt.
Überdeckt man nun Ω mit abzählbar vielen relativ kompakten, konvexen Mengen, beispielsweise Kugeln, und wählt auf jeder dieser Mengen einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten, so stimmen diese Auswahlen auf den paarweisen Durchschnitten überein und definieren somit einen Repräsentanten von u, der offenbar auf ganz Ω stetig ist. Also ist $u \in \mathrm{C}(\Omega)$.
Bemerkung: Alternativ zu dieser Herangehensweise könnte man $u \in \mathrm{C}(\Omega)$ auch unter Verwendung des Satzes von Arzela-Ascoli zeigen.

(d) Sei $U \Subset \Omega$ konvex. Ist $U \subset \Omega_n$, so gilt

$$\big|u_n(y) - u_n(x) - \nabla u_n(x)(y - x)\big| \le |y - x| \sup_{z \in U} \big|\nabla u_n(z) - \nabla u_n(x)\big|.$$

für alle x und y in U. (1)

Lösung: Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [x, y]$ mit $u_n(y) - u_n(x) = \nabla u_n(\xi)$. Hieraus folgt die Behauptung.

(e) Ist $U \Subset \Omega$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|\nabla u_n(y) - \nabla u_n(x)\big| \le \varepsilon$$

für $n \ge n_0$ und $x, y \in U$ mit $|y - x| < \delta$. (2)

Lösung: Sei V eine Menge mit $U \Subset V \Subset \Omega$. Weil jedes $D_j u$ nach Voraussetzung auf $\overline{V}$ stetig (und somit gleichmäßig stetig) ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|D_j u(x) - D_j u(y)| \le \varepsilon$ für $x, y \in V$, falls $|x - y| < \delta$. Sind nun x und y sogar in U, gilt $|x - y| < \delta$ und ist $\frac{1}{n} < \operatorname{dist}(U, V^c)$, so folgt

$$\big|D_j u_n(y) - D_j u_n(x)\big| \le \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_n(z) \big|D_j u(y - z) - D_j u(x - z)\big| \,\mathrm{d}z \le \varepsilon.$$

Summiert man schließlich noch über j, ergibt sich die Behauptung.

(f) $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$. (3)

Lösung: Wir fixieren den stetigen Repräsentanten von u, dessen Existenz in dieser Aufgabe bereits nachgewiesen wurde. Sei $U \Subset \Omega$ eine Kugel. Dann konvergiert (u_n) auf U gleichmäßig gegen u und (∇u_n) gleichmäßig gegen ∇u, insbesondere also auch punktweise. Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$. Wähle δ wie im vorigen Aufgabenteil. Dann gilt unter Verwendung der vorigen beiden Aufgabenteile

$$\begin{aligned}\big|u(y) - u(x) - \nabla u(x)(y-x)\big| &= \lim_{n\to\infty} \big|u_n(y) - u_n(x) - \nabla u_n(x)(y-x)\big| \\ &\leq |y-x| \limsup_{n\to\infty} \sup_{z\in B(x,\delta)} \big|\nabla u_n(z) - \nabla u_n(x)\big| \\ &\leq \varepsilon |y-x|\end{aligned}$$

für alle $y \in U$ mit $|x-y| < \delta$. Diese Aussage kann man auch in der vertrauteren Form

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x)(y-x) + o(|y-x|)$$

schreiben. Man hat also nachgewiesen, dass u an der Stelle x klassisch differenzierbar ist.

Weil man zu jedem $x \in \Omega$ eine Kugel $U \Subset \Omega$ finden kann, die x enthält, zeigt dies, dass u in jedem Punkt von Ω klassisch differenzierbar ist. Da die Ableitung nach Voraussetzung stetig ist, hat man damit nach Definition $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ gezeigt.

Bemerkung: Wenn man den Satz kennt, dass aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge und ihrer Ableitungen bereits die stetige Differenzierbarkeit der Grenzfunktion folgt, folgt die Aussage dieser Teilaufgabe mit weniger Überlegungen.