Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 10.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 8

28. Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Matrix, $z \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) := Ux + z$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\Omega_1 := \varphi(\Omega_2)$. Zeige, dass die Zuordnung $u \mapsto u \circ \varphi$ als linearer Operator $L^2(\Omega_1) \to L^2(\Omega_2)$, $H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ und $H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$ ein isometrischer Isomorphismus ist! (4)
Tipp: Substitutionsregel für Lebesgue-integrierbare Funktionen.

29. *Satz von Riemann-Lebesgue:* Sei $d \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\right\}.$$

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ bezeichne $\hat{u}$ die Fouriertransformatierte von u. Zeige:

(a) Ist $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so ist $\hat{u} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$. (2)

(b) Die Abbildung $u \mapsto \hat{u}$ ist von $L^1(\mathbb{R}^d)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ stetig. (2)

(c) Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|\hat{u}(x)| \le \frac{c}{1+|x|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Insbesondere gilt $\hat{u} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. (2)
Tipp: Man kann die Rechenregeln für die Fouriertransformation ausnutzen.

(d) Für jedes $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{u} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. (1)
Erinnerung: $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ist in $L^\infty(\Omega)$ abgeschlossen.
Hinweis: Man darf hier ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ dicht ist; diesen Satz kann man genau wie im Fall $L^2(\mathbb{R}^d)$ zeigen.

30. Zeige die in der Vorlesung nicht bewiesene Inklusion

$$\left\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \widetilde{\eta u} \in H^k(\mathbb{R}^d) \text{ für alle } \eta \in \mathcal{D}(\Omega)\right\} \subset H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

für $k \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$! (2)

31. *Dichtheit der Testfunktionen in $H^k(\mathbb{R}^d)$:* Sei $d \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei $H^0(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d)$. Sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \le 1$, und sei $\eta_n(x) := \eta(x/n)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\eta_n(\varrho_n * u)$ für jedes $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ in der Norm von $L^2(\mathbb{R}^d)$ gegen u konvergiert. Zeige:

(a) Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und (u_n) und (v_n) Folgen in $H^k(\mathbb{R}^d)$. Für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| \le k$ sei $(D^\alpha u_n)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $(D^\alpha v_n)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Dann ist die Folge der Produkte $(u_n v_n)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. (3)

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, α ein Multiindex, und $w_n^\alpha := n^{|\alpha|} D^\alpha \eta_n$. Für jeden Multiindex β ist die Folge $(D^\beta w_n^\alpha)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. (2)

(c) Ist $u \in H^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert $(\eta_n(\varrho_n * u))$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ gegen u. (2)
Bemerkung: Dies zeigt, dass die Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ dicht sind, also $H_0^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d)$.