Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 17.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 23

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 9

32. *Maximumsprinzip für schwach subharmonische Funktionen:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L^2(\Omega)$, $f \leq 0$, $\lambda \geq 0$, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung $\lambda u - \Delta u = f$.

(a) Sei $\lambda = 0$. Zeige, dass u^+ in $H_0^1(\Omega)$ liegt, schlussfolgere $\int_\Omega |\nabla u^+|^2 = 0$, und beweise damit $u \leq 0$! (2)

Lösung: Wir beweisen die Aussage direkt für $\lambda \geq 0$, was auch den zweiten Aufgabenteil positiv beantwortet.

Dass die Funktion u^+ in $H_0^1(\Omega)$ liegt, sieht man, indem man u durch eine Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_c^1(\Omega)$ approximiert und beobachtet, dass die Folge (u_n^+) dann in $H_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ liegt und gegen u^+ konvergiert.

Da die Ableitung von u^+ durch $\nabla u^+ = \nabla u \, \mathbb{1}_{\{u>0\}}$ gegeben ist, ergibt sich dank $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ nach Definition der schwachen Lösung und wegen $f \leq 0$ und $\lambda \geq 0$

$$\int_\Omega |\nabla u^+|^2 = \int_\Omega \nabla u \, \nabla u^+ = \int_\Omega (f - \lambda u) u^+ = \int_{\{u>0\}} (fu - \lambda u^2) \leq 0.$$

Dies ist nur für $\nabla u^+ \equiv 0$ möglich. Laut Vorlesung folgt hieraus wegen $u^+ \in H_0^1(\Omega)$, dass $u^+ = 0$ ist, was man äquivalent als $u \leq 0$ schreiben kann.

(b) Sei $\lambda > 0$. Gilt auch unter dieser Voraussetzungen stets $u \leq 0$? (1)

Lösung: Ja, wie schon im ersten Aufgabenteil bewiesen wurde.

33. *Maximumsprinzip mittels Dirichlet-Prinzip:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$, $g \geq 0$, $G \in H^1(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ eine H^1-Fortsetzung von g und $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutige H^1-Lösung des zugehörigen Dirichletproblems, also $\Delta u = 0$ und $u - G \in H_0^1(\Omega)$. Zeige:

(a) Ist $G \geq 0$ und $u - G$ sogar in $H_c^1(\Omega)$, so ist $u^+ - G$ in $H_0^1(\Omega)$. (2)

Lösung: Sei $K \subset \Omega$ kompakt und $u(x) - G(x) = 0$ für $x \notin K$. Wegen $G \geq 0$ ist dann $u(x) \geq 0$ für $x \notin K$. Also ist

$$u^+(x) - G(x) = u(x) - G(x) = 0$$

für $x \notin K$, was zeigt, dass $u^+ - G$ kompakten Träger hat. Laut Vorlesung ist $u^+ \in H^1(\Omega)$, woraus also insgesamt $u^+ - G \in H_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ folgt.

(b) Ist (φ_n) eine Folge in $H_c^1(\Omega)$, die in $H^1(\Omega)$ gegen $u - G$ konvergiert, und setzt man $u_n := \varphi_n + G$, so konvergiert und $(u_n^+ - G)$ in $H^1(\Omega)$ gegen $u^+ - G$. (1)

Lösung: Aus der Stetigkeit von $u \mapsto u^+$, siehe Aufgabe 22, folgt

$$u_n^+ = (\varphi_n + G)^+ \to (u - G + G)^+ = u^+.$$

(c) $u^+ - G \in H_0^1(\Omega)$. (2)

Lösung: Wir können ohne Einschränkung $G \geq 0$ annehmen. Anderenfalls kann man G durch G^+ ersetzen, was wegen $g \geq 0$ wiederum eine H^1-Fortsetzung von g ist, denn in der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenschaft $u - G \in H_0^1(\Omega)$ nicht von der konkreten Wahl der H^1-Fortsetzung G von g abhängt.

Nach Definition von $H_0^1(\Omega)$ gibt es eine Folge von Testfunktionen (φ_n), also insbesondere eine Folge in $H_c^1(\Omega)$, die in $H^1(\Omega)$ gegen $u - G$ konvergiert. Mit $u_n := \varphi_n + G$ ist dann nach dem ersten Aufgabenteil $u_n^+ - G$ in $H_0^1(\Omega)$, und die Folge konvergiert nach dem zweiten Aufgabenteil gegen $u^+ - G$. Aus der Abgeschlossenheit von $H_0^1(\Omega)$ folgt nun die Behauptung.

(d) $u = u^+$, also $u \geq 0$. (2)

Hinweis: Es soll das Dirichlet-Prinzip verwendet werden.

Lösung: Nach dem vorigen Aufgabenteil ist $u^+ - G$ in $H_0^1(\Omega)$. Wäre $u \neq u^+$, so würde aus dem Dirichlet-Prinzip

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 < \int_\Omega |\nabla u^+|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathbb{1}_{\{u>0\}} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

folgen, ein Widerspruch. Folglich muss $u = u^+$ gelten, also $u \geq 0$.

34. *Allgemeiner linearer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien a_{ij}, b_j, c_i und e in $L^\infty(\Omega)$. Für den formalen Differentialoperator

$$Lu := -\sum_{j=1}^d D_j\Big(\sum_{i=1}^d a_{ij} D_i u + b_j u\Big) + \sum_{i=1}^d c_i D_i u + eu$$

und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ versteht man unter einer *schwachen Lösung* des Problems

$$(D) \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a_L(u,v) := \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v + \sum_{j=1}^d \int_\Omega b_j u D_j v + \sum_{i=1}^d \int_\Omega c_i D_i u v + \int_\Omega euv = \int_\Omega fv$$

für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es gebe $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zeige:

(a) Die Form a_L ist auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ bilinear und stetig. (1)

Lösung: Die Bilinearität ist offensichtlich. Zudem gilt

$$\begin{aligned} |a_L(u,v)| &\leq \sum_{i,j=1}^d \|a_{ij}\|_\infty \|D_i u\|_2 \|D_j v\|_2 + \sum_{j=1}^d \|b_j\|_\infty \|u\|_2 \|D_j v\|_2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \|c_i\|_\infty \|D_i u\|_2 \|v\|_2 + \|e\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

für

$$M := \sum_{i,j=1}^d \|a_{ij}\|_\infty + \sum_{j=1}^d \|b_j\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|c_i\|_\infty + \|e\|_\infty.$$

Konvergiert (u_n) in $H_0^1(\Omega)$ gegen u und (v_n) gegen v, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}|a_L(u_n,v_n)-a_L(u,v)| &\le |a_L(u_n,v_n-v)|+|a_L(u_n-u,v)|\\ &\le M\|u_n\|_{H^1(\Omega)}\|v_n-v\|_{H^1(\Omega)}+M\|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\to 0,\end{aligned}$$

da in diesem Fall $(\|u_n\|_{H^1(\Omega)})$ beschränkt ist. Dies zeigt die Stetigkeit von a_L.

(b) Gibt es $\delta < 2\alpha$ mit $\sum_{j=1}^d (b_j+c_j)^2 \le 2\delta e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung. (2)

Tipp: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $xy \le \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2$.

Lösung: Da in der Definition der schwachen Lösung der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ äquivalent auch durch $H_0^1(\Omega)$ ersetzt werden kann, braucht man nur nachzuweisen, dass das Problem, ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a_L(u,v)=\int_\Omega fv$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ zu finden, eine eindeutige Lösung besitzt. Nach dem Satz von Lax-Milgram ist dies der Fall, wenn a_L koerziv ist. Dank der Poincaré-Ungleichung braucht man also nur zu zeigen, dass es ein $\eta > 0$ gibt, für das die Abschätzung

$$a_L(u,u)\ge \eta\int_\Omega |\nabla u|^2$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju \ge \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Die Terme erster Ordnung kann man mittels

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d\int_\Omega b_juD_ju+\sum_{i=1}^d\int_\Omega c_iD_iuu &\ge -\sum_{i=1}^d\int_\Omega |b_i+c_i|\,|D_iu|\,|u|\\ &\ge -\sum_{i=1}^d\int_\Omega\Big(\frac{\delta}{2}|D_iu|^2+\frac{1}{2\delta}|b_i+c_i|^2|u|^2\Big)\\ &= -\frac{\delta}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2-\int_\Omega\sum_{i=1}^d\frac{(b_i+c_i)^2}{2\delta}u^2\end{aligned}$$

abschätzen Setzt man dies zusammen, ergibt sich unter Verwendung der Voraussetzungen an δ

$$a_L(u,u)\ge\big(\alpha-\frac{\delta}{2}\big)\int_\Omega|\nabla u|^2+\int_\Omega\Big(e-\sum_{i=1}^d\frac{(b_i+c_i)^2}{2\delta}\Big)u^2\ge\eta\int_\Omega|\nabla u|^2$$

mit $\eta := \alpha - \frac{\delta}{2} > 0$, also gerade die benötigte Abschätzung.

(c) Sind b_i und c_i stetig differenzierbar und gilt $\sum_{i=1}^d (D_ib_i + D_ic_i) \le 2e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung. (3)

Lösung: Wie im letzten Aufgabenteil genügt es, die Abschätzung

$$a_L(u,u)\ge\eta\int_\Omega|\nabla u|^2$$

für ein $\eta > 0$ nachzuweisen. Da beide Seiten der Ungleichung stetig in $u \in H_0^1(\Omega)$ sind, braucht man dies nur für u im dichten Unterraum $\mathcal{D}(\Omega)$ zu tun. Für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt aber mit partieller Integration und der Produktregel

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \int_\Omega b_j u D_j u + \sum_{i=1}^d \int_\Omega c_i D_i u u &= -\sum_{i=1}^d \int_\Omega D_i\big((b_i + c_i)u\big)u \\ &= -\sum_{i=1}^d \int_\Omega D_i(b_i + c_i)u^2 - \sum_{i=1}^d \int_\Omega (b_i + c_i) D_i u u.\end{aligned}$$

Sortiert man die Terme um, zeigt dies

$$\sum_{j=1}^d \int_\Omega b_j u D_j u + \sum_{i=1}^d \int_\Omega c_i D_i u u = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_\Omega D_i(b_i + c_i)u^2.$$

Insgesamt erhält man also nach Voraussetzung

$$a_L(u, u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \Big(e - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d D_i(b_i + c_i)\Big) u^2 \geq \eta \int_\Omega |\nabla u|^2$$

mit $\eta := \alpha$.

(d) Sind alle Funktionen hinreichend regulär und ist u eine schwache Lösung des Problems, so ist der Ausdruck Lu in der oben angegebenen Form wohldefiniert, und eine reguläre Funktion u, die in $H_0^1(\Omega)$ liegt, ist genau dann eine schwache Lösung, wenn sie $Lu = f$ erfüllt. Versuche, möglichst schwache Regularitätsvoraussetzungen zu stellen! (2)

Lösung: Seien zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen a_{ij} und b_j in $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $D_k a_{ij}$ und $D_k b_j$ in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle k. Die Produktregel für Sobolevfunktionen garantiert, dass $a_{ij} D_i u$ und $b_j u$ für $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ wieder in $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegen. Also ist Lu für alle Funktionen in $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ im Sinne von schwachen Ableitungen erklärt, und $Lu \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Eine Funktion $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit $Lu = f$ im Sinne von schwachen Ableitungen heißt *starke Lösung* von (D). Nach Definition der schwachen Ableitung erfüllt eine starke Lösung für jede Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega f v = \int_\Omega Lu\, v = a_L(u, v),$$

ist also eine schwache Lösung.

Ist umgekehrt u eine schwache Lösung, die in $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegt, so gilt nach Definition der schwachen Ableitung und der schwachen Lösung

$$\int_\Omega Lu\, v = a_L(u, v) = \int_\Omega f v$$

für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da die Testfunktionen in $L^2(\Omega)$ dicht liegen, stimmt daher $Lu|_U$ für jedes $U \Subset \Omega$ in $L^2(U)$ mit $f|_U$ überein. Das zeigt $Lu = f$ fast überall, also dass u eine starke Lösung ist.

Bemerkung: Setzt man überall statt schwacher Differenzierbarkeit klassische Differenzierbarkeit voraus, liefern die gleichen Argumente ein analoges Resultat für klassische anstelle von starken Lösungen.

35. *Maximale Regularität elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf* $\mathbb{R}^d$ *mit konstanten Koeffizienten:* Seien a_{ij}, b_j, c_i und e reelle Zahlen und die Matrix (a_{ij}) symmetrisch und positiv definit. Wir betrachten das Problem

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^d a_{ij} D_j D_i u - \sum_{j=1}^d b_j D_j u + \sum_{i=1}^d c_i D_i u + eu = f,$$

für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, wobei der schwache Lösungsbegriff analog zu Aufgabe 34 definiert wird. Man kann wie in Teil (c) von Aufgabe 34 zeigen, dass das Problem für $e > 0$ zu jedem $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Zeige:

(a) Es gibt ein $e_0 = e_0(a_{ij}, b_j, c_i) > 0$ mit der Eigenschaft, dass für $e \geq e_0$ und jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die schwache Lösung des Problems in $H^2(\mathbb{R}^d)$ liegt. (4)

Lösung: Als Heuristik kann man mit der Überlegung starten, dass die Fouriertransformierte $\hat{u}$ einer Lösung u nach den Rechenregeln der Fouriertransformation die Gleichung

$$\begin{aligned}\hat{f} := \mathcal{F}f &= \mathcal{F}\Big(-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} D_j D_i u - \sum_{j=1}^{d} b_j D_j u + \sum_{i=1}^{d} c_i D_i u + eu\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} x_j x_i \mathcal{F}u - \sum_{j=1}^{d} i b_j x_j \mathcal{F}u + \sum_{i=1}^{d} i c_i x_i \mathcal{F}u + e\mathcal{F}u = m\hat{u}\end{aligned}$$

mit

$$m(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} x_j x_i - \sum_{j=1}^{d} i b_j x_j + \sum_{i=1}^{d} i c_i x_i + e$$

erfüllen muss.

Für den eigentlichen Beweis sei $\alpha > 0$ der kleinste Eigenwert von $a := (a_{ij})$, $\eta := \frac{\alpha}{2} > 0$, und $e_0 := \eta + \frac{|b|^2+|c|^2}{\alpha}$. Dann gilt mit $b := (b_j)$, $c := (c_i)$ und $x = (x_j)$ für $e \geq e_1$

$$\begin{aligned}m(x) &= x^T a x - i b^T x + i c^T x + e \geq \alpha |x|^2 - |b|\,|x| - |c|\,|x| + e \\ &\geq \alpha |x|^2 - \frac{\alpha}{2}|x|^2 - \frac{1}{\alpha}(|b|^2 + |c|^2) + e \geq \eta(|x|^2 + 1)\end{aligned}$$

für $\eta := \frac{\alpha}{2} > 0$, wobei der Tipp mit $\varepsilon := \frac{\alpha}{2}$ verwendet wurde. Also erfüllt $v := \frac{\hat{f}}{m}$ die Abschätzung

$$|v(x)|^2\big(1 + |x|^2\big)^2 \leq \frac{|\hat{f}|^2}{(|x|^2+1)^2}(1 + |x|^2)^2 = |\hat{f}|^2,$$

was wegen $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ nach Definition $v \in \hat{H}^2(\mathbb{R}^d)$ zeigt. Laut Vorlesung gibt es also ein $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{u} := \mathcal{F}u = v$. Für dieses u gilt nun mit der gleichen Rechnung wie in der Heuristik

$$\mathcal{F}(Lu) = m\hat{u} = \hat{f},$$

was dank Eindeutigkeit der Fouriertransformation $Lu = f$ zeigt, also dass u die Gleichung sogar im Sinne von schwachen Ableitungen (also *stark*) löst. Wie in Teil (d) der vorigen Aufgabe weist man nun leicht nach, dass u auch eine schwache Lösung ist, die eindeutige schwache Lösung also in $H^2(\mathbb{R}^d)$ liegt.

(b) Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ eine schwache Lösung, so ist $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. (1)

Lösung: Sei u eine schwache Lösung. Dann ist u für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch eine schwache Lösung des Problems

$$Lu + \lambda u = f + \lambda u.$$

Wählt man $\lambda > e_0 - e$, so erfüllt der neue Differentialoperator $L + \lambda$ die Bedingungen des ersten Aufgabenteils. Da $f + \lambda u$ nach Voraussetzung in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, zeigt dies nach dem ersten Aufgabenteil $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$, also die Behauptung.