Universität Ulm

Freitag, 07.05.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathbb{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{X}$ und $\alpha\colon I \to \mathbb{C}$ seien differenzierbar. Zeige, dass folgende Funktionen ebenfalls differenzierbar sind und bestimme die Ableitung:

(a) $f + g$; (1)

(b) αf; (1)

(c) $\langle f, g\rangle_{\mathbb{X}}$ (unter der Annahme, dass $\mathbb{X}$ ein Hilbertraum ist); (1)

2. Sei $\mathbb{X}$ ein (reeller oder komplexer) Banachraum und $A \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$. Zeige:

(a) Für jedes $T > 0$ konvergiert die Reihe $\mathrm{e}^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ gleichmäßig in $t \in [-T, T]$. (2)

(b) Für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$. (2)

(c) Die Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ ist stetig differenzierbar mit Ableitung (3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tA} = A\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,A.$$

3. *Bonusaufgabe:* Sei $\mathbb{A}$ eine Banachalgebra. Das bedeutet, $\mathbb{A}$ sei ein (reeller oder komplexer) Banachraum versehen mit einer assoziativen, bilinearen Operation $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $(A, B) \mapsto AB := A \cdot B$ (die die Rolle einer Multiplikation spielt), für die $\|A \cdot B\| \le \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{A}$ gilt. Zeige:

(a) Sei $\mathbb{X}$ ein Banachraum. Bezüglich der Operatornorm ist $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ eine Banachalgebra. (1)

(b) Die Multiplikation $(A, B) \mapsto AB$ ist stetig. (1)

(c) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $A, B\colon I \to \mathbb{A}$ differenzierbare Funktionen, so ist AB ebenfalls differenzierbar und $(AB)' = A'B + AB'$. (1)

(d) Es gebe ein multiplikativ neutrales Element $E \in \mathbb{A}$. Wir setzen $A^0 := E$ für alle $A \in \mathbb{A}$. Dann bildet die Menge $G := \{\mathrm{e}^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation, wobei e^{tA} wie in Aufgabe 2 definiert sei. (1)
Hinweis: Man mache sich zuerst selbst klar, dass sich alle Aussagen in Aufgabe 2 auf diese Situation übertragen.

(e) Seien $A, B \in \mathbb{A}$. Es ist genau dann $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt. (2)